

前 言

《高等代数》是高等学校数学专业的一门基础课,也是理工科其它一些专业学习的内容,编写一本好的参考读物无疑是有重要意义的,笔者多年来一直为此而努力。1986年,孙宗明写成3万余字的材料,铅印发给学生,可以作为本书的第一稿,初步形成了本书的体例;1988年,由孙宗明执笔,并与张纯伯合作完成27万余字的材料,油印发给学生,作为本书的第二稿,确定了本书的体例;1989年1月开始,孙宗明先后联络17个省的25位代数学同行,组织对第二稿进行修订,历经一年有余,终于形成了本书的原稿(第三稿)。

本书与北京大学编《高等代数》1988年版本相吻合,同样地分为十一章。而每章均分为“概括说明”、“内容提要”、“重点难点”、“习题类解”、“补充资料”、“基本习题”六节,对高等代数的内容与方法进行了全面的阐述,与已出版的同类书籍相比,具有体例新颖、内容丰富的特点,经在几届学生中试用,效果良好。

侯根明(山西吕梁教育学院)、乔凤珠(内蒙古师大)、李振国(内蒙河套大学)、高明谦(吉林师院)、江占文(黑龙江佳木斯师专)、周晓钟(齐齐哈尔师院)、章仲英(江苏徐州师院)、高建筑(安徽巢湖师专)、王灿照(福建龙岩师专)、吴丹柱(江西景德镇教育学院)、王文省(山东聊城师院)、姚存峰(济宁师专)、李玉文(德州教育学院)、王新民(昌潍师专)、姜同松(临沂师专)、叶伯诚(临沂师专)、张纯伯(泰安师专)、贾周(河南师大)、张正才(湖北黄冈教育学院)、陈进之(湖南益阳师专)、周楚昌(广东佛山大学)、薛育海(四川师院)、冯发良(陕西宝鸡师院)、徐兆亮(甘肃西北师大)、伊保林(青海民院)诸位具有中高级职称的同志(按省顺序列出)参加了对第二稿总的修订,主要工作是:对于每章的“重点难点”发表意见,改正第二稿中的错误,补充精彩的习题与内容,补充

参考书目。其中，王灿照、高建筑、叶伯诚、张正才、王新民、姚存峰、乔凤珠、李振国、周晓钟、王文省诸位同志还分别（顺次）对第一至第九章、第十一章作了修订，主要工作是：将所分工章的“§ 3 重点难点”扩充，广泛征求本单位同行的意见，详细论述解决难点的方法；对“§ 5 补充资料”中的“历史资料点滴”作补充，写成较系统的材料；对“§ 4 习题类解”中每类习题的分析进行扩写，补充个别题型，调换少部分例题；并对其余各节发表意见。因此，第三稿是集合众多同行的经验与智慧，在第二稿的基础上修订而成的。

本书由泰安师范专科学校数学系副教授孙宗明任主编，叶伯诚、乔凤珠、张纯伯任副主编，张纯伯任责任副主编。

主编孙宗明，以第二稿为依据，吸收各参编同行的修订材料，最后执笔定稿。乔凤珠、张纯伯、叶伯诚、王文省、李振国协助孙宗明，做了一些工作。各位参编者是参考北京大学编《高等代数》1978年版进行修订的，在定稿时已见到1988年版，孙宗明参考新版定稿并独立完成新版中新增设的《双线性函数》一章。

在本书的十一章之后，还有两个“目录”与五个“附录”，均为孙宗明等的独立之作，同样是本书的重要组成部分。

兰州大学数学系郭聿琦教授、聊城师范学院数学系杨子胥教授、山东师范大学数学系李师正教授作为本书的审校，付出了辛勤的劳动，提出了许多宝贵的意见，他们还共同向兰州大学出版社推荐本书，编者对他们致以衷心的感谢。兰州大学出版社对本书的出版十分关心，做了很多工作，在此深致谢意。

编者虽从事《高等代数》教学多年，也进行过某些代数学问题的学习和研究，但由于水平所限，难免有不妥之处，敬请同行与读者批评指正。

编 者

1990年3月

目 录

第一章	多项式	1
第二章	行列式	61
第三章	线性方程组	104
第四章	矩阵	139
第五章	二次型	178
第六章	线性空间	203
第七章	线性变换	238
第八章	λ -矩阵	281
第九章	欧几里得空间	307
第十章	双线性函数	349
第十一章	代数基本概念介绍	367
高等代数参考书目录		389
高等代数参考文章目录		397
附录一	扩域与尺规作图	414
附录二	关于分母有理化问题	423
附录三	代数方程的根式解问题	426
附录四	有限维向量空间	439
附录五	数学证明方法	461

第一章 多项式

§1 概括说明

多项式理论是高等代数的重要内容，是学习代数学及其它数学分支的必要的基_础，是中学数学有关知识的加深和扩充。

在高等代数的许多部分都用到多项式的概念及理论，如：矩阵的多项式、线性变换的多项式、特征多项式等。多项式在抽象代数学中扮演着重要角色，多项式环是抽象环的三大背景（整数环、多项式环、矩阵环）之一，在扩域的理论中常常谈及多项式的根。多项式函数是基本函数，用多项式函数去逼近比较复杂的函数，是数学分析等学科中重要的研究课题之一。

本章的内容分为四个部分：数域，一般数域 F 上的一元多项式，特殊数域 Q 、 R 、 C 上的一元多项式，一般数域 F 上的多元多项式。

本章先建立数环与数域的概念，作为研究多项式理论的基础，同时也作为本书中研究其它一些对象的基础。我们研究问题，总是在一个确定的数域上进行，这与中学数学相比，具有更高的严格性与确定性。

本章主要研究数域 F 上的一元多项式，可归纳为如下四个小部分：一般理论（定义、次数、运算），整除理论（整除、最大公因式、互素），因式分解理论（不可约多项式、因式分解定理、标准分解式、重因式），根的理论（多项式的值、多项式的根、根的个数、多项式函数）。

对于有理数域 Q 、实数域 R 、复数域 C 这三个常用的数域而言，一元多项式的理论还有一些更深入的结果。特别地，我们将

给出 $\mathbf{R}(x)$ 、 $\mathbf{C}(x)$ 中多项式的标准分解式，讨论根的性质。这也是本章的重要内容之一。

在一元多项式的讨论中，整除是基础，因式分解是中心，而因式分解又与根紧密联系，要抓住整除、分解、根这三个问题及其相互关联，使一元多项式理论成为一个有机体。

本章还要研究数域 F 上的多元多项式的基本理论，分为四个小部分：多元多项式的概念，齐次多项式，对称多项式，一元多项式根的判别式。

本章的补充资料是：最小公倍式，整数的整除理论与因数分解理论，实根的界和个数，多元多项式的整除与因式分解，历史资料点滴。

§2 内容提要

I 数域

设 M 是一个非空数集。若 M 中任意两个数作某一运算的结果仍在 M 中，则称 M 对于该种运算是封闭的。

设 S 是一个非空数集。若对于任意的 $a, b \in S$ ，都有 $a+b$ ， $a-b$ ， $ab \in S$ ，换言之， S 对于加法、减法、乘法封闭，则称 S 是一个数环。

$\{0\}$ 是数环。整数集 \mathbf{Z} 是数环。若 S_1, S_2 是数环，则 $S_1 \cap S_2$ 是数环。任何数环都包含零数环 $\{0\}$ 。若 S 是数环，且 $1 \in S$ ，则 S 包含整数环 \mathbf{Z} 。零数环 $\{0\}$ 是唯一的有限数环。

设 F 是一个至少含有两个数的数集。若对于任意的 $a, b \in F$ ，都有 $a+b$ ， $a-b$ ， $ab \in F$ ，而当 $b \neq 0$ 时还有 $a/b \in F$ ，换言之， F 对于加法、减法、乘法、除法（除数不为零）都封闭，则称 F 是一个数域。显然，数域是数环。

若 F 是数域，则 $0, 1 \in F$ 。有理数集 \mathbf{Q} ，实数集 \mathbf{R} ，复数集 \mathbf{C} 都是数域。若 F_1, F_2 是数域，则 $F_1 \cap F_2$ 是数域。数域都是无限

集合。

任意数域都包含有理数域，换言之，有理数域是最小的数域。存在无穷多个互异的数域。

II 一般数域F上的一元多项式

— 一般理论

1 概念

设F是一个数域， x 是一个文字， n 是一个非负整数， $a_0, a_1, \dots, a_n \in F$ 。形式表达式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ (或 $a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$) 称为系数在数域F中的一元多项式，或者简称为数域F上的一元多项式。记为 $f(x)$, $g(x)$, \dots 等。并且，常用连加号缩写。例如

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

形式表达式的意思是，仅作为一个字符系统。即“+”号并不意味着“加”， $a_i x^i$ 并不意味着 a_i 乘以 x^i ，而 x^i 也并不意味着 x 的 i 次幂。总之，就是一个如此写出的东西而已。

$a_i x^i$ 称为 $f(x)$ 的 i 次项， a_i 称为 i 次项的系数。满足 $a_n \neq 0$ 的最大整数 n 称为 $f(x)$ 的次数，记为 $\deg(f(x)) = n$ ， a_n 称为 $f(x)$ 的首项系数，当 $a_n = 1$ 时，称 $f(x)$ 为首1多项式。系数全为零的多项式称为零多项式。记为 0 。零多项式没有“次数”的概念。 $f(x)$ 是零次多项式当且仅当 $f(x)$ 是F中的一非零常数，因此，绝不能把零次多项式与零多项式混同起来。

约定：1) 系数是零的项可以省略不写（从而，自然也可以添上一些系数是零的项）；2) 系数是1的项可以把系数1省略不写；3) x^1 写为 x ；4) x^0 写为1， $a_0 x^0$ 简写为 a_0 ，从而，零次项称为常数项。

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是数域F上的多项式，且同次项的系数均相

等, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等, 记为 $f(x) = g(x)$. 从而, 相等的多项式是完全一样的, 可以写为完全相同的形式. 这就是通常比较系数法的依据.

2 运算

设 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$, 不妨设 $m \leq n$, 从而

再设 $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$, 则多项式 $\sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$ 称为 $f(x)$

与 $g(x)$ 的和, 记为 $f(x) + g(x)$. 多项式 $\sum_{s=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=s} a_i b_j \right) x^s$

称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的积, 记为 $f(x)g(x)$. 多项式 $\sum_{i=0}^n (-a_i) x^i$ 称

为 $f(x)$ 的负多项式, 记为 $-f(x)$. 多项式 $f(x) + (-g(x))$ 称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的差, 记为 $f(x) - g(x)$.

对于任意的 $f(x), g(x)$, 成立: 1) $f(x) + 0 = 0 + f(x) = f(x)$; 2) $f(x)0 = 0f(x) = 0$; 3) $f(x)1 = 1f(x) = f(x)$; 4) $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$; 5) $f(x) - 0 = f(x)$; 6) $k \in \mathbf{F}$,

$$kf(x) = k \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^n (ka_i) x^i = f(x)k.$$

多项式的加法与乘法运算, 满足下列规律:

1) 加法交换律 $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$;

2) 加法结合律

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x));$$

3) 乘法交换律 $f(x)g(x) = g(x)f(x)$;

4) 乘法结合律 $(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$;

5) 乘法对加法的分配律

$$f(x)(g(x) + h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x);$$

6) 乘法消去律 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$, $f(x)\neq 0\Rightarrow g(x)=h(x)$, 其中 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是任意的多项式.

3 次数定理

若 $f(x)$, $g(x)$ 是数域 F 上的两个多项式, 且 $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$, 则, 1) 当 $f(x)+g(x)\neq 0$ 时, $\deg(f(x)+g(x))\leq \max(\deg(f(x)), \deg(g(x)))$; 2) $\deg(f(x)g(x))=\deg(f(x))+\deg(g(x))$.

$f(x)g(x)=0$ 的必要充分条件是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 之中至少有一个是零多项式.

4 一元多项式环

数域 F 上文字 x 的一元多项式的全体, 连同它们的加法与乘法运算一起组成的系统, 称为数域 F 上的一元多项式环, 记为 $F[x]$.

以后我们将知道, “环”是一个代数系统, 并且 $F[x]$ 对于多项式的加法与乘法作成环.

二 整除理论

1 带余除法

带余除法定理. 对于 $F[x]$ 中的任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$, 其中 $g(x)\neq 0$, 一定有 $F[x]$ 中的多项式 $q(x)$ 与 $r(x)$, 使得 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$, 其中 $r(x)=0$ 或 $\deg(r(x))<\deg(g(x))$, 并且, 这样的 $q(x)$, $r(x)$ 是唯一确定的.

定理中的 $q(x)$, $r(x)$ 分别称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式与余式. 关于 $q(x)$, $r(x)$ 的求法, 使用通常的除法即可, 一般称之为长除法.

综合除法定理. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, $a_n\neq 0$, $n\geq 1$, $f(x)=q(x)(x-c)+r$, $q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$, 则 $b_{n-1}=a_n$, $b_{n-2}=a_{n-1}+cb_{n-1}$, $b_{n-3}=a_{n-2}+cb_{n-2}$, \cdots , $b_1=a_2+cb_2$, $b_0=a_1+cb_1$, $r=a_0$

$+cb_0$, 从而确定了 $q(x)$ 与 r , 并且可以用下列格式将计算程序表示出来, 称为综合除法.

$$\begin{array}{r|l} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \cdots a_1 & a_0 & c \\ +) & cb_{n-1} & cb_{n-2} \cdots cb_1 & cb_0 & \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} \cdots b_0 & r & \end{array}$$

设 $f(x) = (ax+b)Q(x) + R$, $a \neq 0$,

$$f(x) = \left(x - \left(-\frac{b}{a} \right) \right) q(x) + r, \text{ 则 } Q(x) = \frac{q(x)}{a}, R = r.$$

利用综合除法可以把 $f(x)$ 表示成 $x-c$ 的方幂和的形式: 若 $f(x) = (x-c)f_1(x) + b_0$, $f_1(x) = (x-c)f_2(x) + b_1$, $f_2(x) = (x-c)f_3(x) + b_2$, \cdots , $f_{n-2}(x) = (x-c)f_{n-1}(x) + b_{n-2}$, $f_{n-1}(x) = (x-c)b_n + b_{n-1}$, 则 $f(x) = b_n(x-c)^n + b_{n-1}(x-c)^{n-1} + \cdots + b_1(x-c) + b_0$.

反过来, 由 $f(x)$ 的 $x-c$ 的方幂和的形式, 可写成 x 的多项式的形式: 设 $f(x) = b_n(x-c)^n + b_{n-1}(x-c)^{n-1} + \cdots + b_1(x-c) + b_0$, 令 $x = y+c$, 则 $f(y+c) = b_n y^n + b_{n-1} y^{n-1} + \cdots + b_1 y + b_0$ 记为 $g(y)$, 利用综合除法可以把 $g(y)$ 表示成 $y+c$ 的方幂和的形式, 即 $g(y) = f(y+c) = a_n(y+c)^n + a_{n-1}(y+c)^{n-1} + \cdots + a_1(y+c) + a_0$, 则 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

若 $f(x), g(x) \in \mathbf{F}(x)$, $f(x) \neq 0$, $\deg(g(x)) \geq 1$, 则在 $\mathbf{F}(x)$ 中有唯一的多项式组 $r_0(x), r_1(x), \cdots, r_{k-1}(x), q_k(x)$, 使得 $f(x) = q_k(x)g^k(x) + r_{k-1}(x)g^{k-1}(x) + \cdots + r_1(x)g(x) + r_0(x)$, 其中 $q_k(x) \neq 0$, 且 $\deg(q_k(x)) < \deg(g(x))$, $g^0(x) = 1$, 而 $r_i(x) = 0$ 或 $\deg(r_i(x)) < \deg(g(x))$, $i = 0, 1, \cdots, k-1$, $f(x)$ 的上述表达式, 称为 $f(x)$ 按 $g(x)$ 的展开式. 事实上, 这是前面结果的推广.

2 整除的概念

定义. 设 $f(x), g(x) \in \mathbf{F}[x]$. 若有 $h(x) \in \mathbf{F}[x]$, 使得 $f(x) = g(x)h(x)$, 则称多项式 $g(x)$ 整除多项式 $f(x)$, 记为 $g(x) | f(x)$. 否则, 即, 对于任意 $h(x) \in \mathbf{F}[x]$, 均有 $f(x) \neq g(x)h(x)$, 则称 $g(x)$ 不整除 $f(x)$, 记为 $g(x) \nmid f(x)$. 当 $g(x) | f(x)$ 时, 称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的倍式, 而当 $g(x) \neq 0$ 时, $f(x)/g(x)$ 表示 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的商式.

整除具有下列性质: 1) 对任意 $f(x)$, 有 $f(x) | 0$, 从而零多项式有任意高次的因式; 2) $0 | f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$; 3) 零次多项式整除任意多项式; 4) 对任意 $f(x)$ 及任意 $c \in \mathbf{F}$, $c \neq 0$, 成立 $f(x) | cf(x)$, $cf(x) | f(x)$; 5) 对任意 $f(x)$ 及任意 $c \in \mathbf{F}$, $c \neq 0$, 成立: $g(x) | f(x) \Leftrightarrow g(x) | cf(x)$, 从而, $f(x)$ 与 $cf(x)$ 有相同的因式; $cg(x) | f(x) \Leftrightarrow g(x) | f(x)$, 从而, $g(x)$ 与 $cg(x)$ 有相同的倍式; 6) 任意多项式 $f(x)$ 都有 c 与 $cf(x)$ ($c \in \mathbf{F}$, $c \neq 0$) 这两个因式, 称为 $f(x)$ 的平凡因式; 7) 非零多项式的次数不低于其因式的次数, 即, $f(x) \neq 0$, $g(x) | f(x) \Rightarrow g(x) \neq 0$ 且 $\deg(g(x)) \leq \deg(f(x))$; 8) $f(x) | g(x)$, $g(x) | h(x) \Rightarrow f(x) | h(x)$, 即, 传递性成立; 9) $f(x) | g(x)$ 不能推出 $g(x) | f(x)$, 即, 对称性不成立; 10) $f(x) | g(x)$, $g(x) | f(x) \Leftrightarrow f(x) = cg(x)$, $c \in \mathbf{F}$, $c \neq 0$; 11) $f(x)$ 整除 $g(x)$, $h(x)$ 之一 $\Rightarrow f(x) | g(x)h(x)$; 12) $f(x) | g_i(x)$, 任意 $h_i(x) \in \mathbf{F}[x]$, $i = 1, 2, \dots, t \Rightarrow f(x) | (g_1(x)h_1(x) + \dots + g_t(x)h_t(x))$, 称为, $f(x)$ 整除 $g_1(x), \dots, g_t(x)$ 的一个组合.

整除的判定: $g(x) = 0$ 时, $g(x) | f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$;
而 $g(x) \neq 0$ 时, $g(x) | f(x) \Leftrightarrow g(x)$ 除 $f(x)$ 所得余式为 0.

整除关系不因数域的扩大而改变.

3 最大公因式

定义. 设 $f(x), g(x) \in \mathbf{F}[x]$. 若有 $d(x) \in \mathbf{F}[x]$, 使得,
1) $d(x) | f(x)$, $d(x) | g(x)$, 即 $d(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的公因式,

2) $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$, $\phi(x) | f(x)$, $\phi(x) | g(x) \Rightarrow \phi(x) | d(x)$, 即 $f(x)$, $g(x)$ 的公因式都是 $d(x)$ 的因式, 则称 $d(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的一个最大公因式.

简单性质: 1) 任意 $f(x)$ 与非零常数 c 的一个最大公因式是 c ; 2) $g(x) | f(x) \Rightarrow g(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式; 3) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是 $0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) = 0$.

唯一性. 若 $d(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的一个最大公因式, 则 $cd(x)$ ($c \in \mathbb{F}$, $c \neq 0$) 是 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式; 并且, 只有这样的乘积 $cd(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式. 换言之, 若不计非零常数因式的差别, $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式是唯一的. 称为相对唯一性 (或基本唯一性).

当 $f(x)$, $g(x)$ 不全为零时, 用 $(f(x), g(x))$ 表示 $f(x)$, $g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式; 当 $f(x) = g(x) = 0$ 时, $(f(x), g(x))$ 表示 0. 从而, 特殊的最大公因式 $(f(x), g(x))$ 是唯一的. 称为绝对唯一性.

存在性. $\mathbb{F}[x]$ 中的任意两个多项式 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)$ 是存在的. 并且, 当 $f(x) = g(x) = 0$ 时, $d(x) = 0$; 当 $f(x) = 0$, $g(x) \neq 0$ 时, $d(x) = g(x)$; 当 $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ 时, 可以用辗转相除法求得 $d(x)$.

表示为组合. $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)$ 可以表示为 $f(x)$, $g(x)$ 的一个组合. 即, 存在 $u(x)$, $v(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得 $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$.

上面的等式为理论上的证明带来方便. 等式中的 $u(x)$, $v(x)$ 不是唯一的, 而且有无限多对.

若 $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$, 则 $d(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式 $\Leftrightarrow d(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的公因式.

最大公因式不因数域的扩大而改变.

前面论述的两个多项式的最大公因式的理论, 对于多个多项

式的最大公因式，类似地成立。

求多个多项式的最大公因式，转化为求两个多项式的最大公因式，基于下面的公式 ($s \geq 3$)

$$\begin{aligned} & (f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_s(x)) \\ &= ((\dots((f_1(x), f_2(x)), f_3(x)), \dots), f_s(x)). \end{aligned}$$

4 互素

定义. 若 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式是非零常数, 即, $(f(x), g(x))=1$, 则称 $f(x), g(x)$ 互素, 常记为

$$(f(x), g(x)) = 1.$$

互素的判定. $F[x]$ 中的多项式 $f(x), g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow F[x]$ 中有多项式 $u(x), v(x)$, 使得 $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$.

互素的性质:

- 1) $f(x) | g(x)h(x)$, $(f(x), g(x))=1 \Rightarrow f(x) | h(x)$;
- 2) $f_1(x) | g(x)$, $f_2(x) | g(x)$, $(f_1(x), f_2(x))=1 \Rightarrow f_1(x)f_2(x) | g(x)$;
- 3) $(f(x), h(x))=1$, $(g(x), h(x))=1 \Leftrightarrow (f(x)g(x), h(x))=1$.

最大公因式与互素的关系. 若 $f(x), g(x)$ 不全为 0, 则 $(f(x), g(x))=d(x) \Leftrightarrow (f_1(x), g_1(x))=1$, $f(x)=f_1(x)d(x)$, $g(x)=g_1(x)d(x)$.

互素不因数域的扩大而改变.

上面讨论了两个多项式互素, 类似地, 可以讨论多个多项式互素. 设有多项式 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$, $s \geq 2$. 若其中任意两个多项式都互素, 则称 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ 两两互素. 于是, 称 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ 互素为整体互素. 若 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ 两两互素, 则 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ 必整体互素, 反之不然.

三 因式分解理论

1 不可约多项式

若 $F[x]$ 中的 $n(n>0)$ 次多项式 $f(x)$ 能够分解为 $F[x]$ 中的两个次数都小于 n 的多项式 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的乘积, 则称 $f(x)$ 在 $F[x]$ 中可约, 或称 $f(x)$ 在 F 上可约. 否则, 即 $f(x)$ 在 $F[x]$ 中仅有平凡因式, 则称 $f(x)$ 在 $F[x]$ 中不可约, 称 $f(x)$ 是不可约多项式.

对于正次数的多项式, 谈论可约与不可约的问题; 对于零多项式及零次多项式, 不谈论可约与不可约的问题.

任意一次多项式在任意数域上总是不可约的.

多项式的可约性是相对于给定的数域而言的, 随着数域的改变而改变.

不可约多项式的性质:

1) $p(x)$ 是不可约多项式 $\Leftrightarrow cp(x)$ 是不可约多项式, $c \neq 0$;
2) 次数 >0 的多项式 $p(x)$ 是不可约多项式 \Leftrightarrow 对任意 $f(x)$, 有且仅有 $p(x) | f(x)$ 与 $(p(x), f(x))=1$ 之一;

3) 次数 >0 的多项式 $p(x)$ 是不可约多项式 \Leftrightarrow 对任意 $f(x)$, $g(x)$, 由 $p(x) | f(x)g(x)$ 得出 $p(x) | f(x)$ 或 $p(x) | g(x)$;

4) $p(x)$ 是不可约多项式, $p(x) | f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x) \Rightarrow p(x)$ 至少整除 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ 之一;

5) $F[x]$ 中一正次数多项式 $f(x)$ 的最低正次数的因式一定是不可约的, 从而 $f(x)$ 一定被 $F[x]$ 中的某个不可约多项式整除.

2 唯一因式分解定理

数域 F 上的每一个次数 >0 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解为数域 F 上的有限个不可约多项式的乘积. 所谓唯一性是说, 若有 $f(x)$ 的两个分解式 $f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$, 则必有 $s=t$, 并且适当调换因式的次序后有 $p_i(x)=c_iq_i(x)$, $c_i \in F$, $c_i \neq 0$, $i=1, 2, \dots, s$.

3 标准分解式

数域 \mathbf{F} 上的每一个次数 >0 的多项式 $f(x)$ 都能唯一(不计因子次序)地写为 $f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$, 其中 $p_i(x)(i=1, 2, \cdots, s)$ 是 $\mathbf{F}[x]$ 中互异的首1不可约多项式, $r_i(i=1, 2, \cdots, s)$ 是正整数, a 是 $f(x)$ 的首项系数. 称为 $f(x)$ 的标准分解式(或典型分解式).

对任意 $h(x)$, r 为正整数, $h^r(x)$ 表示 r 个 $h(x)$ 相乘; 对于 $h(x)\neq 0$, $h^0(x)=(h(x))^0=1$.

若 $f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$ 是标准分解式, 则 $g(x)|f(x)\Leftrightarrow g(x)=bp_1^{\delta_1}(x)p_2^{\delta_2}(x)\cdots p_s^{\delta_s}(x)$, $b\in\mathbf{F}$, $b\neq 0$, $0\leq\delta_i\leq r_i$, $i=1, 2, \cdots, s$.

若 $f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$, $g(x)=bp_1^{\lambda_1}(x)p_2^{\lambda_2}(x)\cdots p_s^{\lambda_s}(x)$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $p_i(x)(i=1, 2, \cdots, s)$ 是互异的首1不可约多项式, $r_i, \lambda_i(i=1, 2, \cdots, s)$ 是非负整数, 则 $(f(x), g(x))=p_1^{\alpha_1}(x)p_2^{\alpha_2}(x)\cdots p_s^{\alpha_s}(x)$, $\alpha_i=\min(r_i, \lambda_i)$, $i=1, 2, \cdots, s$.

应用标准分解式, 从理论上研究整除与最大公因式, 证明某些结论, 是十分方便的. 但是, 在实践上绝不能代替带余除法与辗转相除法.

4 重因式

$\mathbf{F}[x]$ 中的多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的导数(或微商)是指 $\mathbf{F}[x]$ 中的多项式 $f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$ ($f(x)=c, c\in\mathbf{F}$ 时, $f'(x)=0$). $f'(x)$ 称为 $f(x)$ 的一阶导数. 一阶导数 $f'(x)$ 的导数称为 $f(x)$ 的二阶导数, 记作 $f''(x)$. $f''(x)$ 的导数称为 $f(x)$ 的三阶导数, 记作 $f'''(x)$. \cdots . $f(x)$ 的 $k(k\geq 3)$ 阶导数记作 $f^{(k)}(x)$.

用定义容易验证多项式的下列求导公式: $(f(x)+g(x))'$

$$=f'(x)+g'(x), (f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

$$(cf(x))'=cf'(x), \left(\prod_{i=1}^m f_i(x)\right)'=\sum_{i=1}^m (f_i'(x) \prod_{j \neq i} f_j(x)),$$

$$(f^m(x))'=mf^{m-1}(x)f'(x).$$

设 $p(x)$ 是不可约多项式, k 是非负整数. 若 $p^k(x) \mid f(x)$, 而 $p^{k+1}(x) \nmid f(x)$, 则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式, k 称为重数. $k=1$ 时, $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的单因式; $k>1$ 时, $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的重因式; $k=0$ 时, $p(x)$ 根本不是 $f(x)$ 的因式, 为方便, 称为 $f(x)$ 的零重因式.

不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 $\Leftrightarrow f(x)=p^k(x)g(x)$, $p(x) \nmid g(x)$.

若 $f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$ 是标准分解式, 则 $p_i(x)$ 是 $f(x)$ 的 r_i 重因式, $i=1, 2, \dots, s$.

重因式定理. 若 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k ($k \geq 1$) 重因式, 则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式. 特别地, $f(x)$ 的单因式不是 $f'(x)$ 的因式.

若 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式, $k \geq 1$, 则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 $\Leftrightarrow p(x) \mid f(x)$.

设 $p(x)$ 是不可约多项式, $k \geq 1$, 则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 $\Leftrightarrow p(x)$ 是 $f(x), f'(x), \dots, f^{(k-1)}(x)$ 的因式, 但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式.

$p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式 $\Leftrightarrow p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式.

$f(x)$ 没有重因式 $\Leftrightarrow (f(x), f'(x))=1$. 由此可以判定 $f(x)$ 有无重因式. 并且, $f(x)$ 有无重因式不因数域的改变而改变.

若 $(f(x), f'(x))=d(x)$, $k \geq 1$, 则, 1) $p(x)$ 是 $d(x)$ 的 k 重因式 $\Leftrightarrow p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k+1$ 重因式; 2) $p(x)$ 是 $d(x)$ 的不可约因式 $\Leftrightarrow p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式.

分离重因式.

若 $\deg(f(x)) \geq 1$, 则 $f(x)/(f(x), f'(x))$ 没有重因式, 且与 $f(x)$ 有相同的不可约因式.

求 $f(x)$ 的标准分解式: 1) 求 $f(x)$ 的所有不可约因式 $p_1(x), p_2(x), \dots, p_s(x)$. 由上, 转化为求次数较低的且没有重因式的多项式 $f(x)/(f(x), f'(x))$ 的不可约因式; 2) 对每个 $p_i(x)$, 确定 r_i , 使 $p_i^{r_i}(x) | f(x)$, 但 $p_i^{r_i+1}(x) \nmid f(x)$, 只要进行一系列除法即可以, $f(x) = p_i(x)f_1(x)$, $f_1(x) = p_i(x)f_2(x)$, \dots , $f_{r_i-1}(x) = p_i(x)f_{r_i}(x)$, $p_i(x) \nmid f_{r_i}(x)$.

设 $f(x)$ 的标准分解式是 $f(x) = ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x) \dots p_s^{r_s}(x)$, 因式的最高重数是 $r(r > 1)$, 1) 令 $F_i(x)$ 是一切 i 重因式之积, $i = 1, 2, \dots, r$, 则 $f(x) = aF_1(x)F_2^2(x) \dots F_r^r(x)$; 2) 令 $d_1(x) = (f(x), f'(x))$, $d_2(x) = (d_1(x), d_1'(x))$, \dots , $d_k(x) = (d_{k-1}(x), d_{k-1}'(x))$, \dots , $d_r(x) = (d_{r-1}(x), d_{r-1}'(x))$, 则 $d_1(x) = F_2(x)F_3^2(x) \dots F_r^{r-1}(x)$, $d_2(x) = F_3(x)F_4^2(x) \dots F_r^{r-2}(x)$, $d_3(x) = F_4(x)F_5^2(x) \dots F_r^{r-3}(x)$, \dots , $d_{r-1}(x) = F_r(x)$, $d_r(x) = 1$; 3) $h_1(x) = f(x)/d_1(x) = aF_1'(x)F_2(x) \dots F_r(x)$, $h_2(x) = d_1(x)/d_2(x) = F_2(x)F_3(x) \dots F_r(x)$, $h_3(x) = d_2(x)/d_3(x) = F_3(x)F_4(x) \dots F_r(x)$, \dots , $h_r(x) = d_{r-1}(x)/d_r(x) = F_r(x)$, 则有 $F_1(x) = h_1(x)/ah_2(x)$, $F_2(x) = h_2(x)/h_3(x)$, \dots , $F_{r-1}(x) = h_{r-1}(x)/h_r(x)$, $F_r(x) = h_r(x)$.

求 $f(x)$ 的标准分解式: 1) 求 $F_1(x), F_2(x), \dots, F_r(x)$; 2) 分解 $F_1(x), F_2(x), \dots, F_r(x)$.

四 根的理论

1 多项式的值

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in F[x]$, $c \in F$, 在 $f(x)$ 的表示式中把 x 用 c 代替, 从而, 得到 F 中的数 $a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0$.

$+ \cdots + a_1 c + a_0$, 称为当 $x=c$ 时 $f(x)$ 的值, 记为 $f(c)$.

设 $f(x), g(x), u(x), v(x) \in \mathbf{F}[x]$, $c \in \mathbf{F}$, 则

- 1) $f(x) = g(x) \Rightarrow f(c) = g(c)$;
- 2) $u(x) = f(x) \pm g(x) \Rightarrow u(c) = f(c) \pm g(c)$;
- 3) $v(x) = f(x)g(x) \Rightarrow v(c) = f(c)g(c)$.

余式定理. $f(x) \in \mathbf{F}[x]$, $c \in \mathbf{F}$. 一次多项式 $x-c$ 去除 $f(x)$ 所得余式是常数, 等于 $f(c)$.

于是, 可以用综合除法求 $f(x)$ 当 $x=c$ 时的值 $f(c)$.

2 多项式的根

设 $f(x) \in \mathbf{F}[x]$, $c \in \mathbf{F}$. 若 $f(c) = 0$, 则称 c 是 $f(x)$ 在 \mathbf{F} 中的一个根.

因式定理. c 是 $f(x) \in \mathbf{F}[x]$ 在 \mathbf{F} 中的根 $\Leftrightarrow (x-c) \mid f(x)$.

若 $\mathbf{F}[x]$ 中的多项式 $f(x)$ 在 \mathbf{F} 中有 k 个不同的根 c_1, c_2, \dots, c_k , 则 $f(x) = (x-c_1)(x-c_2) \cdots (x-c_k)\phi(x)$, $\phi(x) \in \mathbf{F}[x]$.

设 $f(x) \in \mathbf{F}[x]$, $c \in \mathbf{F}$. 若 $x-c$ 是 $f(x)$ 在 $\mathbf{F}[x]$ 中的 k 重因式, 则称 c 是 $f(x)$ 的 k 重根. 当 $k=1$ 时称为单根, 当 $k>1$ 时称为重根, 当 $k=0$ 时 c 不是 $f(x)$ 的根.

$f(x) \in \mathbf{F}[x]$ 在 \mathbf{F} 中有重根 $\Rightarrow (f(x), f'(x)) \neq 1$. 或者, 等价地, $(f(x), f'(x)) = 1 \Rightarrow f(x) \in \mathbf{F}[x]$ 在 \mathbf{F} 中无重根.

设 $f(x) \in \mathbf{F}[x]$, $f(x) \neq 0$, 则 $f_1(x) = f(x)/(f(x), f'(x))$ 在 \mathbf{F} 中无重根. 并且, 若不考虑根的重数, 则 $f(x)$ 与 $f_1(x)$ 在 \mathbf{F} 中根相同.

$c \in \mathbf{F}$ 是 $f(x) \in \mathbf{F}[x]$ 的 k 重根 ($k \geq 1$) $\Leftrightarrow f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ 而 $f^{(k)}(c) \neq 0$.

$\mathbf{F}[x]$ 中的 n 次多项式 $f(x)$ 在 \mathbf{F} 中的根的个数不超过 n , 重根按重数计算.

3 多项式函数

设 $f(x) \in \mathbf{F}[x]$. 作 σ : 对任意 $c \in \mathbf{F}$, $\sigma(c) = f(c)$, 则 σ 是

F 到 F 的一个映射. 称为由多项式 $f(x)$ 所决定的定义在 F 上的多项式函数, 并且, 将多项式函数也记为 $f(x)$. 但是, 必须强调, 对于 $f(x)$, 一般仍指多项式, 而在表示多项式函数时, 一定附加“函数”二字.

设 $f(x), g(x)$ 是 $F[x]$ 中的两个多项式, 且次数均不超过 n 或为零多项式. 若对于 F 中 $n+1$ 个互不同的数 c_1, c_2, \dots, c_{n+1} , 均有 $f(c_i) = g(c_i), i=1, 2, \dots, n+1$, 则 $f(x) = g(x)$.

在数域 F 上, 不相等的多项式定义不相等的多项式函数.

设 $f(x), g(x)$ 是 $F[x]$ 中的两个多项式. 若多项式函数 $f(x)$ 与多项式函数 $g(x)$ 相等, 即, 对于任意 $c \in F$, 均有 $f(c) = g(c)$, 则称多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 恒等.

多项式恒等 \Leftrightarrow 多项式相等.

尽管多项式恒等与相等具有完全不同的含义, 是两个完全不同的概念, 但是, 在数域 F 上, 二者却是一致的. 即, 将多项式看作形式表达式与看作函数, 在数域 F 上是等效的. 然而, 为了便于应用与推广, 在代数学中, 多项式看作形式表达式.

4 插值多项式

设 $f(x)$ 是 $F[x]$ 中次数 $< n$ 的多项式, c_1, c_2, \dots, c_n 是 F 中 n 个不同的数. 若 $f(c_i) = a_i, a_i \in F, i=1, 2, \dots, n$, 则

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{a_i (x-c_1) \cdots (x-c_{i-1})(x-c_{i+1}) \cdots (x-c_n)}{(c_i-c_1) \cdots (c_i-c_{i-1})(c_i-c_{i+1}) \cdots (c_i-c_n)} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

II 特殊数域 C, R, Q 上的一元多项式

一 特殊性与一般性

复数域 C 、实数域 R 、有理数域 Q 被称之为特殊数域或常用数域, 是相对于一般数域 F 而言的.

一般性寓于特殊性之中, 因此, 前面对于 $F[x]$ 所作的讨论, 都适用于 $C[x], R[x], Q[x]$. 鉴于 C, R, Q 自身的特殊性,

在 $\mathbf{C}(x)$ 、 $\mathbf{R}(x)$ 、 $\mathbf{Q}(x)$ 中将出现一些新的更深入的结果.

二 复数域 \mathbf{C} 上的一元多项式

代数基本定理. 任意 $n(n>0)$ 次复系数多项式在复数域中至少有一个根.

任意 n 次复系数多项式在复数域中恰有 n 个根，重根按重数计算。

$\mathbf{C}[x]$ 中仅有一次多项式是不可约的, 换言之, 次数 ≥ 2 的多项式均可约.

复系数多项式因式分解定理. $\mathbf{C}[x]$ 中每一个次数 > 0 的多项式 $f(x)$ 都可以在 $\mathbf{C}[x]$ 中唯一地分解为一次因式的乘积, 从而, $f(x)$ 有如下的标准分解式 $f(x) = a(x - \alpha_1)^{l_1}(x - \alpha_2)^{l_2} \cdots (x - \alpha_s)^{l_s}$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为 s 个互异复数, l_1, l_2, \cdots, l_s 为正整数, 且 $l_1 + l_2 + \cdots + l_s = \deg(f(x))$.

韦达定理. 设 $n(n>0)$ 次多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的 n 个根是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 则有

$$\begin{aligned} a_{n-1}/a_n &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n), \\ a_{n-2}/a_n &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$a_0/a_n = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n.$$

三 实数域 \mathbf{R} 上的一元多项式

若实系数多项式 $f(x)$ 有非实的复根 α , 则 α 的共轭复数 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根, 且 α 与 $\bar{\alpha}$ 有相同的重数. 换言之, 实系数多项式的虚根两两成对. 从而, 奇次实系数多项式至少有一个实根.

设 $f(x)$ 是 n 次实系数多项式, 则, 1) 当 $n \geqslant 3$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}[x]$ 中可约, 2) 当 $n=2$ 时, $f(x)=ax^2+bx+c (a \neq 0)$ 在 $\mathbf{R}[x]$ 中可约 $\Leftrightarrow b^2-4ac \geqslant 0$. 换言之, $\mathbf{R}[x]$ 中的不可约多项式只有一次多项式及满足 $b^2-4ac < 0$ 的二次多项式 ax^2+bx+c .

实系数多项式因式分解定理。每一个次数 >0 的实系数多项式 $f(x)$ ，在 $\mathbf{R}(x)$ 中都唯一地分解为一次因式与二次不可约因式的乘积，从而， $f(x)$ 有如下的标准分解式

$a(x-c_1)^{l_1}\cdots(x-c_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r}$ ，其中 c_1, \dots, c_s 为互异实数， $p_1, q_1, \dots, p_r, q_r$ 为互异实数组， $p_i^2-4q_i<0, i=1, \dots, r$ ，而 $l_1, \dots, l_s, k_1, \dots, k_r$ 均为正整数，且 $l_1+\cdots+l_s+2(k_1+\cdots+k_r)=\deg(f(x))$ 。

四 有理数域 \mathbf{Q} 上的一元多项式

设有整系数多项式 $g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 。若 $(b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0)=1$ ，则称 $g(x)$ 是一个本原多项式。

任一个非零的有理系数多项式 $f(x)$ 都可以表示为一个有理数 r 与一个本原多项式 $g(x)$ 的乘积，即 $f(x)=rg(x)$ ，并且，在不计正负号的情况下表法唯一。

高斯引理。两个本原多项式的乘积是一个本原多项式。

若一个次数 >0 的整系数多项式能够分解为两个次数较低的有理系数多项式的乘积，则它一定能分解为两个次数较低的整系数多项式的乘积。

设 $f(x), g(x)$ 是整系数多项式，且 $g(x)$ 是本原多项式。若 $f(x)=g(x)h(x)$ ， $h(x)$ 为有理系数多项式，则 $h(x)$ 必为整系数多项式。

于是，有理系数多项式 $f(x)$ 在 \mathbf{Q} 上可约 \Leftrightarrow 整系数多项式 $kf(x)$ ($k\in\mathbf{Z}$) 在 \mathbf{Q} 上可约 \Leftrightarrow 整系数多项式 $kf(x)$ 在 \mathbf{Z} 上可约。

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个整系数多项式， $\alpha=s/r$ 是它的一个有理根， $(r, s)=1$ ，则，1) $r|a_n, s|a_0$ ；2) $f(x)=(x-(s/r))q(x)$ ，其中 $q(x)$ 是整系数多项式；3) $f(1)/(1-\alpha), f(-1)/(1+\alpha)$ 是整数。

设 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, 而 \sqrt{c} 是无理数. 若 $\alpha = a + b\sqrt{c}$ 是 $f(x)$ 的根, 则 $\tilde{\alpha} = a - b\sqrt{c}$ 也是 $f(x)$ 的根, 且 $\tilde{\alpha}$ 与 α 有相同的重数. 换言之, 有理系数多项式的这种类型的无理根两两成对.

艾森斯坦因判别法. 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一个整系数多项式. 若有一个素数 p , 使得, 1) $p \nmid a_n$, 2) $p \mid a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$, 3) $p^2 \nmid a_0$, 则 $f(x)$ 在 \mathbb{Q} 上不可约.

该判别法的条件仅是充分条件, 所以, 必须强调, 不满足该判别法条件的多项式未必可约.

$\mathbb{Q}[x]$ 中存在任意次数的不可约多项式.

设 $f(x)$ 是整系数多项式, 令 $x = ay + b$, a, b 是整数, 且 $a \neq 0$, 并令 $g(y) = f(ay + b)$, 则 $g(y)$ 与 $f(x)$ 在有理数域上的可约性相同.

克朗奈格定理. 设 $f(x)$ 是 $n(n > 0)$ 次有理系数多项式, 则 $f(x)$ 可以经有限次有理运算在 \mathbb{Q} 上分解为不可约多项式的乘积.

IV 一般数域 F 上的多元多项式

一 多元多项式的概念

1 定义

设 F 是数域, x_1, x_2, \cdots, x_n 是 n 个文字, $a \in F$, k_1, k_2, \cdots, k_n 是非负整数. 形式表达式 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 称为数域 F 上的一个 n 元单项式, 简称为单项式. a 称为单项式的系数, k_i 称为 x_i 的次数. 当 $a \neq 0$ 时, $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ 称为单项式的次数. $k_i = 0$ 的 $x_i^{k_i}$ 可以略去不写, 也可以添上一些 $k_i = 0$ 的 $x_i^{k_i}$. 当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ 时, $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 写为 a .

若两个单项式的对应的 x_i 的次数相同, 则称这两个单项式为同类项. 即, $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 与 $bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 是同类项

$$\Leftrightarrow k_i = l_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

有限个单项式用加号连结而成的形式表达式

$$\sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, a_{k_1 k_2 \dots k_n} \in F,$$

称为数域 F 上的一个 n 元多项式, 常记为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 有时简记为 f . 其中的单项式称为多元多项式的项, 各项的系数称为多元多项式的系数. 约定: 多元多项式中不含有同类项; 系数1省略; 系数为0的项可以省略不写, 也可以添上一些系数为0的项. 系数全为零的多元多项式称为零多项式, 记为0. 可写为 $a \in F$ 的项称为常数项. 当 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ 时, 次数最高的项的次数称为 f 的次数, 记为 $\deg(f)$.

两个单项式相等 \Leftrightarrow 它们是同类项且系数相等. 两个多元多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow f$ 与 g 有完全相同的项.

2 运算

F 上的两个 n 元多项式的和是指把出现于 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中对应同类项的系数相加(有时要添上一些系数为0的项)所得到的一个 n 元多项式, 记为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

F 上的两个单项式的积如下规定:

$$\begin{aligned} & (ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n})(bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}) \\ &= (ab)x_1^{k_1+l_1}x_2^{k_2+l_2}\dots x_n^{k_n+l_n}. \end{aligned}$$

F 上的两个 n 元多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的积是指 f 的每一项分别与 g 的每一项相乘, 出现的同类项系数相加成为一项, 而后把得到的所有乘积用加号连结起来, 所得的多元多项式. 积记为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)g(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

规定: $-f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 即 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的各

项系数变号之后所得到的 n 元多项式： $f-g=f+(-g)$ 。

对于任意的多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 成立：1) $f+0=0+f=f$ ；2) $f0=0f=0$ ；3) $f1=1f=f$ ；4) $f-g=0 \Leftrightarrow f=g$ ；5) $f-0=f$ 。

n 元多项式的加法与乘法运算，满足下列规律：1) $f+g=g+f$ ；2) $(f+g)+h=f+(g+h)$ ；3) $fg=gf$ ；4) $(fg)h=f(gh)$ ；5) $f(g+h)=fg+fh$ 。

加法的次数定理。 f, g 是 F 上的两个 n 元多项式， $f \neq 0, g \neq 0, f+g \neq 0$ ，则 $\deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$ 。

数域 F 上文字 x_1, x_2, \dots, x_n 的 n 元多项式的全体，连同它们的加法与乘法运算一起组成的系统，称为数域 F 上的 n 元多项式环，记为 $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 。

3 字典排列法

一元多项式按其项的次数给出一个自然的排列顺序，而多元多项式就不能如此。模仿字典的排列原则，得到字典排列法。

设有非负整数有序数组 $\alpha = (k_1, k_2, \dots, k_n), \beta = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ 。若有 $i \leq n$ ，使得 $k_1 - l_1 = k_2 - l_2 = \dots = k_{i-1} - l_{i-1} = 0$ ，而 $k_i - l_i > 0$ ，则称 α 先于 β ，记为 $\alpha > \beta$ ，例如， $(1, 3, 2) > (1, 2, 4)$ 。若 β 先于 α ，则记为 $\alpha < \beta$ 。若 $k_1 - l_1 = \dots = k_n - l_n = 0$ ，则记 $\alpha = \beta$ 。于是，三种关系： $\alpha > \beta, \alpha = \beta, \alpha < \beta$ ，有且仅有一个成立。而且，“ $>$ ”具有传递性。

若让 $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ 与 $\alpha = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ 对应，则可以按“ $>$ ”关系来排列 n 元多项式的项。这就是字典排列法。 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的按字典排列法写出来的第一个系数不为零的项，称为 f 的首项。应该指出，首项不一定具有最大次数。

当 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0, g(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ 时，乘积 fg 的首项等于 f 的首项与 g 的首项的积。由此得出：1) $f_i \neq 0, i=1, 2, \dots, m \Rightarrow f_1 f_2 \dots f_m$ 的首项等于每个 f_i 首项之积；

2) $f \neq 0, g \neq 0 \Rightarrow fg \neq 0$; 3) $fg = fh, f \neq 0 \Rightarrow g = h$.

4 多项式函数

设有

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

而 $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{F}$, 则 \mathbf{F} 中的数

$$f(c_1, c_2, \dots, c_n) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots c_n^{k_n}$$

称为当 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ 时 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的值。从而, 就由 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 定义了一个 \mathbf{F} 上的 n 元函数, 称为多项式函数, 仍记为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

对于任意 $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{F}$, 成立:

- 1) 若 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
则 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) = g(c_1, c_2, \dots, c_n)$;
- 2) 若 $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
则 $u(c_1, c_2, \dots, c_n) = f(c_1, c_2, \dots, c_n) + g(c_1, c_2, \dots, c_n)$;
- 3) 若 $v(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)g(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
则 $v(c_1, c_2, \dots, c_n) = f(c_1, c_2, \dots, c_n)g(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 。

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是数域 \mathbf{F} 上的 n 元多项式。若对于任意 $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{F}$, 都有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, 则 f 是零多项式, 即 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ 。

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n), g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是数域 \mathbf{F} 上的两个 n 元多项式。若对于任意 $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{F}$, 都有

$$f(c_1, c_2, \dots, c_n) = g(c_1, c_2, \dots, c_n),$$

则 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

二 齐次多项式

若多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中的每个单项式全是 m 次的, 则称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个 m 次齐次多项式, 例如, $f(x_1, x_2,$

$x_3) = 2x_1x_2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 3x_3^4$ 是一个 4 次齐次多项式。

任何一个 m 次多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 都可以唯一地表示

为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^m f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的形式, 其中

$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 i 次齐次多项式, 称为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的 i 次齐次成份。

两个齐次多项式的乘积仍然是齐次多项式, 积的次数就等于这两个多项式的次数之和。

设有 m 次多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^m f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与 l 次多项式 $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^l g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是齐

次成份之和, 则乘积 $h = fg$ 的 k 次齐次成份 $h_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$
$$= \sum_{i+j=k} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) g_j(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

特别地, $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最高次齐次成份是

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) g_l(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

乘积次数定理. 若 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$, $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$, 则 $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

三 对称多项式

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是数域 F 上的 n 元多项式. 若对于任意的 i, j , $1 \leq i < j \leq n$, 都有

$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$, 则称 f 是对称多项式. 例如, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - x_1 - x_2 - x_3$ 是对称多项式。

对称多项式的多项式是对称多项式. 即, 若 f_1, f_2, \dots, f_m 都是 n 元对称多项式. 而 $g(y_1, y_2, \dots, y_m)$ 是任一个 m 元多项式, 则 $g(f_1, f_2, \dots, f_m) = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 元对称

多项式.

下面 n 个 n 元对称多项式

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n,$$

称为初等对称多项式(或基本对称多项式),其中 σ_k 表示 x_1, x_2, \dots, x_n 中每次取 k 个所做的一切可能的乘积之和.

引理. 设有数域 F 上的一个 n 元多项式.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}.$$

以 σ_i 代替 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$, 得到 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 的一个多项式

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \cdots \sigma_n^{k_n}.$$

若 $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$, 则一切系数 $a_{k_1 k_2 \dots k_n} = 0$, 即

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

对称多项式基本定理. 数域 F 上的每一个 n 元对称多项式都可以表示成初等对称多项式 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 的系数在 F 中的多项式, 并且, 这种表示法是唯一的.

把对称多项式表示为初等对称多项式的多项式, 称为对称多项式初等化. 这一工作可以按一定的程序来实现.

四 根的判别式

$$\text{定义 } D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2.$$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ 的 n 个复根(重根按数计算), 则 $f(x)$ 有重根 $\Leftrightarrow D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$. $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 称为 $f(x)$ 的根的判别式.

对于 $f(x) = x^2 + a_1x + a_2$, $D = a_1^2 - 4a_2$.

对于 $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, $D = a_1^2a_2^2 - 4a_2^3 - 4a_1^3a_3 - 27a_3^2 + 18a_1a_2a_3$.

设 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 是数域 F 上的多项式, a_1, a_2, \cdots, a_n 是 $f(x)$ 的 n 个复根 (重根按重数计算), 则 a_1, a_2, \cdots, a_n 的每一个系数取自 F 的对称多项式都是 $f(x)$ 的系数的多项式 (该多项式的系数取自 F), 从而是 F 中的一个数.

§3 重点难点

本章的主题词是: 数环, 数域, 有理数域; 一元多项式, 多项式的次数, 零多项式, 零次多项式, 首1多项式, 一元多项式环; 带余除法, 综合除法, 整除, 因式, 倍式, 平凡因式; 最大公因式, 辗转相除法, 互素, 两两互素; 不可约多项式, 唯一因式分解定理, 标准分解式 (典型分解式); 导数 (微商), k 重因式, 重因式, 单因式; 多项式的值, 余式定理, 多项式的根, 重根, 多项式函数, 多项式恒等; 代数基本定理, 韦达定理, 复根, 实根; 本原多项式, 高斯引理, 素数 (质数), 艾森斯坦因判别法, 有理根, 克朗奈格定理; 单项式, 多元多项式, 字典排列法, 齐次多项式, 对称多项式, 初等对称多项式 (基本对称多项式), 对称多项式初等化, 根的判别式.

本章的基本方法是: 带余除法, 综合除法, 整除判别法, 辗转相除法, 最大公因式组合表示法, 互素判别法, 重因式判别法, 分离重因式法, 因式分解方法, 艾森斯坦因判别法, 有理根求法, 克朗奈格方法, 多元多项式字典排列法, 对称多项式初等化方法, 待定系数法.

本章的重点是: 多项式的概念, 整除理论与因式分解理论, 对称多项式.

本章的研究对象主要是一元多项式. 只有首先明确一元多项

式的实质是什么,才能为掌握全章内容打好基础.多项式被定义为形式表达式,是本章的第一个重点概念.要特别强调形式表达式,通过加法与乘法运算进一步加深理解,并贯彻到所有内容中去.

带余除法定理 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 是讨论问题的基础.因为,有时余式 $r(x)\neq 0$, 所以,多项式的除法不是总可以做的,从而,整除就成了两个多项式之间的一种特殊且重要的关系.因此,整除就成为一个重点概念.最大公因式,互素是在整除的基础上建立起来的,在整个多项式的理论中占重要地位,是必须深入理解的基本概念,特别是互素,在代数学的其它部分常常用到,因此,成为两个重点概念.整除、最大公因式、互素构成整除理论.

因式分解是本章的中心.唯一因式分解定理是一个十分完美的结果,在代数学中很重要,以后还会有类似的结果.唯一因式分解定理是说:次数 > 0 的多项式可以唯一地分解为不可约多项式的乘积,而不可约多项式是在整除意义上最简单的多项式,因此,定理的实质是把复杂的多项式转化为简单的多项式.整除理论和不可约多项式的概念是研究唯一因式分解定理的基础;而重因式概念、特殊数域上的因式分解又是唯一因式分解定理的具体化;由唯一因式分解定理建立了多项式的标准分解式,以标准分解式为工具,又可以从理论上进一步研究整除与最大公因式.因此,唯一因式分解定理确实是中心.此外,因式分解理论还彻底解决了中学数学里因式分解中的若干遗留问题.

对称多项式是多元多项式理论的重点.对称多项式自身形成一套完整的理论与方法,而且有着广泛的应用,例如,一元多项式根的判别式,因此,成为本章的一个重点.

本章的难点是:形式表达式的概念,不可约多项式的概念及唯一因式分解定理的证明,本原多项式的概念及高斯引理 的 证明.

形式表达式的概念，既是本章的一个重点，又是本章的一个难点。多项式被定义为形式表达式，这与中学数学里的定义相距较远，从而，初学者不易理解。当然，也正是这一点，体现了代数学的特色，成为代数学与其它数学学科的一个区别。多项式的运算是形式地定义的。多项式的导数及求导法则都是形式地进行讨论，并不依赖于数学分析中的同类概念。多项式的形式表达式定义以及由此引起的各种问题，很可能长时间地使初学者感到困惑。因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1) 说明形式表达式定义的优越性，文字 x 不仅可以代表数，而且可以是其它的事物，如以后某些章中将要谈到的矩阵、线性变换等， x 的意义十分广泛；2) 确信这是代数学的一个特色，便于以后作各种推广，要学好代数学，就必须尽快理解形式表达式的意义；3) 在讨论加法与乘法的定义、导数的定义时，反过来突出形式表达式；4) 与中学数学的结果加以对照，认识二者的一致性，例如，乘法的（形式的）定义，就是中学里多项式乘法中边乘边合并同类项；5) 在讨论多项式函数之后，进行总结，进一步深入且全面地理解形式表达式的意义。

不可约多项式是多项式理论发展中的一个重要概念，是在整除理论的基础上建立的较高级的概念，从而是较难理解的一个概念。因式分解定理的证明不是构造性的，其证明方法是数学归纳法，而且，证明存在性用第二数学归纳法，证明唯一性用第一数学归纳法，证明篇幅也较长，从而，具有一定的难度。因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1) 将不可约多项式与素数作类比，本质是“不能再分解”；2) 分析不可约多项式与互素的联系与区别；3) 作几个不可约多项式的实际例子，而且，在讨论 $R[x]$ 、 $C[x]$ 中的不可约多项式之后，反过来再认识不可约多项式的本质；4) 证明因式分解式的存在性时，可先从直观入手，将一个较高次的多项式分解为两个较低次的多项式之

积，继续这一步骤，得到分解式，从而，形成一个直观的证明，而后，再上升到用数学归纳法去证明；5）证明因式分解式的唯一性时，要先熟悉关于整除与不可约多项式等的有关性质，作好准备，而后，在证明过程中，注意非零常数因式的选取，并注意下脚的标号。

本原多项式的引入有一定的困难；高斯引理的证明使用反证法，还使用了找一个固定系数的技巧，也有一定的困难。因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1）从实际例子入手认识本原多项式；2）通过化有理系数多项式为一有理数与一本原多项式的乘积，进一步熟悉本原多项式的意义；3）在证明高斯引理时，关键在于，搞清楚由找一个固定系数而引出矛盾的思想方法；4）通过一个实例熟悉高斯引理及其证明过程。

§4 习题类解

I 计算题

→ 带余除法

关于带余除法的习题，有如下几类：1）给定 $f(x)$, $g(x)$ ，求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商式 $q(x)$ 与余式 $r(x)$ ；2）判定是否有 $g(x) \mid f(x)$ ；3）所给的多项式 $f(x)$, $g(x)$ 中有未知的系数，并给定一定的条件（如整除，余式为某种多项式，等），确定未知系数。

解题时要紧扣带余除法公式 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 。一般采用两种方法：1）长除法，即中学数学里多项式的除法，直接相除，得到商式与余式，再按题目的条件作出解答；2）待定系数法，即根据题目的条件设出商式与余式，将问题转化为

乘法, 再由 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, 计算之后比较两边的系数, 作出解答.

例 1 设 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 - x - 2$, 试求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商式与余式. 当余式 $r(x) = 2x + 1$ 时, 求系数 a, b .

解 1 1) 直接作除法, 竖式省略, 得到商式 $q(x) = x - 1$, 余式 $r(x) = (a+1)x + (b-2)$.

2) 已知 $r(x) = 2x + 1$. 由于带余除法所得的商式与余式是唯一的, 所以有 $(a+1)x + (b-2) = 2x + 1$, 由多项式相等的定义得 $a+1=2$, $b-2=1$, 即 $a=1$, $b=3$.

解 2 1) 因为, 带余除法所得的商式与余式是唯一的, 所以, 必有 $x^3 - 2x^2 + ax + b = (x^2 - x - 2)(cx + d) + (mx + n)$, 其中 $q(x) = cx + d$ 为商式, $r(x) = mx + n$ 为余式, c, d, m, n 为待定的系数. 进行计算, 由多项式相等的定义, 比较系数, 得 $c=1$, $d-c=-2$, $-2c-d+m=a$, $n-2d=b$, 从而有 $c=1$, $d=-1$, $m=a+1$, $n=b-2$. 因此, $q(x) = x - 1$, $r(x) = (a+1)x + (b-2)$. 2) 同解 1, 省略.

二 综合除法

关于综合除法的习题, 有如下几类: 1) 求多项式 $f(x)$ 当 $x=c$ 时的值 $f(c)$; 2) 判断 $x-c$ 是否整除 $f(x)$; 3) 判断 c 是否为 $f(x)$ 的根; 4) 由 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, 求 $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n$, 使得 $f(x) = b_n(x-c)^n + b_{n-1}(x-c)^{n-1} + \dots + b_1(x-c) + b_0$; 5) 解 4) 的反问题.

解题的一般方法是: 用综合除法求得 $x-c$ 除 $f(x)$ 所得余式 r , $r = f(c)$. 从而, 对于 1) — 3), 即直接得到解答; 对于 4) — 5), 连续作综合除法, 根据 § 2, I, 二, 所述方法得到解答.

例 2 把 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ 表成 $x+2$ 的多项式.

解 作

1	0	-2	0	3	-2
1	-2	2	-4	11	$=r_1$
1	-4	10	$-24=r_2$		
1	-6	$22=r_3$			
$q_4=1$	$-8=r_4$				

所以 $f(x) = (x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 22(x+2)^2 - 24(x+2) + 11$.

三 最大公因式

关于最大公因式的习题，有如下几类：1) 求 $f(x)$, $g(x)$ 的一个最大公因式；2) 求 $u(x)$, $v(x)$ ，使 $f(x)u(x) + g(x)v(x) = (f(x), g(x))$ ；3) 判断 $f(x)$, $g(x)$ 是否互素；4) 求 $f(x)$, $g(x)$ 的公根，即求多项式 $(f(x), g(x))$ 的根；5) 所给的 $f(x)$, $g(x)$ 中有未知的系数，并给定一些条件（如 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式为某种多项式），确定未知系数。

解题的一般方法是：用辗转相除法求得 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式，从而得出解答。除 2) 之外，在运算过程中，可以乘以数域 F 中的一个适当的非零的数，使系数变得易于计算。

例 3 设 $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$, $g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$ ，试求 $(f(x), g(x))$ ，并求 $u(x)$, $v(x)$ ，使得 $f(x)u(x) + g(x)v(x) = (f(x), g(x))$ 。

解 作辗转相除法，得到

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)g(x) + \left(-\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3}\right),$$

$$g(x) = \left(-\frac{27}{5}x + 9\right)\left(-\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3}\right) + (9x + 27),$$

$$-\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3} = \left(-\frac{5}{81}x - \frac{10}{81}\right)(9x + 27).$$

所以 $(f(x), g(x)) = x + 3$.

$$\begin{aligned}
\text{因为 } 9x+27 &= g(x) - \left(-\frac{27}{5}x+9\right)\left(-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}\right) \\
&= g(x) - \left(-\frac{27}{5}x+9\right)\left[f(x) - \left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\right)g(x)\right] \\
&= \left(\frac{27}{5}x-9\right)f(x) + \left[1 - \left(\frac{27}{5}x-9\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\right)\right]g(x) \\
&= \left(\frac{27}{5}x-9\right)f(x) + \left(-\frac{9}{5}x^2 + \frac{18}{5}x\right)g(x),
\end{aligned}$$

$$\text{所以 } x+3 = f(x)\left(\frac{3}{5}x-1\right) + g(x)\left(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x\right).$$

$$\text{因此, } u(x) = \frac{3}{5}x-1, \quad v(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x \quad \text{使得}$$

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = (f(x), g(x)).$$

例 4 设 $f(x) = x^3 + (1+t)x^2 + 4x + 2u$, $g(x) = x^3 + tx^2 + 2u$ 的最大公因式是一个二次多项式, 求 t, u 的值.

解 对 $f(x), g(x)$ 利用辗转相除法, 得

$$f(x) = g(x) + x^2 + 4x,$$

$$g(x) = (x+t-4)(x^2+4x) - 4(t-4)x + 2u,$$

因为, $f(x), g(x)$ 的最大公因式是二次的, 所以, $-4(t-4)x + 2u = 0$, 由多项式相等的定义得, $-4(t-4) = 0, 2u = 0$, 因此, $t = 4, u = 0$.

四 重因式、重根

关于重因式、重根的习题, 大致分为三类: 1) 判断给定的多项式 $f(x)$ 是否有重因式、是否有重根, 通过计算 $(f(x), f'(x))$ 来解决, 当 $(f(x), f'(x)) = 1$ 时无重因式、无重根; 当 $(f(x), f'(x)) \neq 1$ 时有重因式; 2) 求给定多项式 $f(x)$ 的重因式、重根, 并确定重数, 要从 $d(x) = (f(x), f'(x))$ 出发来解决, 将 $d(x)$ 分解因式、求根; 3) 所给多项式里有未知的系数, 由重因式、重根条件, 求出未知系数.

例 5 试判断多项式 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$ 是否有重因

式, 如果有, 试求出重因式并确定重数.

解 $f'(x) = 6x^2 + 10x - 4$. 作辗转相除法, 求得 $(f(x), f'(x)) = x + 1$, 因此, $f(x)$ 有重因式.

根据重因式定理, $x + 1$ 是 $f(x)$ 的二重因式.

例 6 试确定 A, B , 使得 $x - 1$ 是多项式 $f(x) = Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ ($n > 1$) 的二重因式.

解 $f'(x) = (n+1)Ax^n + nBx^{n-1}$. 若 $x - 1$ 是 $f(x)$ 的二重因式, 则 $f(1) = f'(1) = 0$. 从而, $A + B + 1 = 0$, $(n+1)A + nB = 0$. 解得 $A = n, B = -n - 1$. 所以 $f(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$.

又, $f''(x) = (n+1)n^2x^{n-1} - n(n^2-1)x^{n+2}$, 而 $f''(1) = (n+1)n^2 - n(n^2-1) = n^2 + n \neq 0$, 所以, $x - 1$ 确是 $f(x)$ 的二重因式.

例 7 试确定 t 的值, 使 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + t$ 有重根, 进而确定重根及重数.

解 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. 若 $f(x)$ 有重根 a , 则 $f'(a) = 0$, 即 $3a^2 - 4a + 1 = 0$, 解得 $a = 1/3$ 或 $a = 1$.

当 $a = 1/3$ 时, 由 $f(1/3) = 0$ 求得 $t = -4/27$. 此时, $f(1) \neq 0$, $f''(x) = 6x - 4$, $f''(1/3) \neq 0$, 从而, $1/3$ 是 $f(x)$ 的二重根.

当 $a = 1$ 时, 由 $f(1) = 0$ 求得 $t = 0$. 此时, $f(1/3) \neq 0$, $f''(1) \neq 0$, 从而, 1 是 $f(x)$ 的二重根.

因此, 当 $t = -4/27$ 时, $f(x)$ 有二重根 $x = 1/3$; 当 $t = 0$ 时, $f(x)$ 有二重根 $x = 1$.

五 艾森斯坦因判别法

用艾森斯坦因判别法判定整系数多项式不可约, 一般有两种情况: 1) 直接使用; 2) 作一变量替换 $x = ay + b$, 一般, $a = 1, b = \pm 1$ 等之后, 再使用.

例 8 设 p 是素数, 试判定多项式 $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots$

$+x+1$ 在有理数域上是否可约.

解 由于 $(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)=x^p-1$, 所以 $x-1 \mid x^p-1$, 且 $f(x)=\frac{x^p-1}{x-1}$.

$$\begin{aligned} \text{设 } x=y+1, \quad g(y)=f(y+1) &= \frac{(y+1)^p-1}{(y+1)-1} \\ &= \frac{y^p+c_p^1 y^{p-1}+\cdots+c_p^{p-1} y}{y} = y^{p-1}+c_p^1 y^{p-2}+\cdots+c_p^{p-1}. \end{aligned}$$

$g(y)$ 首项系数为 1, 其它各项系数为 c_p^1, \cdots, c_p^{p-1} . 其中 $c_p^i = \frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}$, $i=1, 2, \cdots, p-1$. 此时, 由于 p 是素数, $i < p$, 所以 $(i!, p)=1$, 因此 $i!$ 整除 $(p-1)\cdots(p-i+1)$, 从而, p 整除 c_p^i , $i=1, 2, \cdots, p-1$. 但常数项 $c_p^{p-1}=p$, 所以 $p^2 \nmid c_p^{p-1}$. 根据艾森斯坦因判别法, $g(y)$ 在有理数域上是不可约的.

我们证明, $f(x)$ 在有理数域上不可约, 用反证法. 实际上, 若 $f(x)$ 在有理数域上可约, 则 $f(x)=u(x)v(x)$, 其中有理系数多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$ 的次数都小于 $f(x)$ 的次数, 则 $g(y)=u(y+1)v(y+1)$, 即 $g(y)$ 可以分解为两个次数都比它低的有理系数多项式的积, 所以 $g(y)$ 在有理数域上可约, 引出矛盾. 因此, $f(x)$ 在有理数域上不可约.

说明 当不能直接应用艾森斯坦因判别法时, 作变量替换, 使系数变化, 就有可能应用判别法. 因为是研究可约性, 所以次数不能改变, 因此, 变量替换 $x=y+1$, $y-1$ 就是首先要考虑的了.

六 求有理系数多项式的有理根

求有理系数多项式的有理根可以转化为求整系数多项式的有理根. 根据关于整系数多项式的有理根定理, 先写出所有可能的有理根, 而后用综合除法验证, 就可以求得全部有理根. 应该

注意两点：1) 每求出一个有理根，就将原多项式降低一次，再对得到的商式验根即可；2) 当 $f(1) \neq 0$, $f(-1) \neq 0$ 时，可用 $f(1)/(1-\alpha)$, $f(-1)/(1+\alpha)$ 不是整数来排除一些可能的根 α ，以减少验根次数。

例 9 求 $f(x) = x^5 + \frac{7}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 8x - 6$ 的全部有理根。

解 $g(x) = 2f(x) = 2x^5 + 7x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 16x - 12$.
 $g(x)$ 的所有可能的有理根是 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm 1/2, \pm 3/2$.
 $g(1) = -27, g(-1) = -5$, 由 $(1+2) \nmid g(-1)$, 得出 2 不是根, 同理得出 $\pm 3, -4, \pm 6, \pm 12, 1/2, 3/2$ 都不是根. 从而只要验证 $-2, 4, -1/2, -3/2$.

$$\begin{array}{r|l} 2 & +7 & +3 & -11 & -16 & -12 & \\ -4 & -6 & +6 & +10 & +12 & & \\ \hline 2 & +3 & -3 & -5 & -6 & +0 & \\ -4 & +2 & +2 & +6 & & & \\ \hline 2 & -1 & -1 & -3 & +0 & & \end{array} \quad \begin{array}{l} -2 \\ \\ \\ \end{array}$$

所以 $g(x) = (x+2)^2 h(x)$, $h(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$. 由 $h(4) \neq 0$, $h(-1/2) \neq 0$ 知 4, $-1/2$ 不是根. 但是

$$\begin{array}{r|l} 2 & -1 & -1 & -3 & \\ & 3 & +3 & +3 & \\ \hline 2 & +2 & +2 & +0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{3}{2} \\ \\ \end{array}$$

所以 $h(x) = (x - (3/2))(2x^2 + 2x + 2)$. 易知 $2(x^2 + x + 1)$ 没有有理根. 因此, $f(x)$ 的全部有理根是 $-2, -2, 3/2$.

说明 求出 $f(x)$ 的全部有理根后, 有时可以进一步求得全部根. 在本例中, $x^2 + x + 1$ 的复根是 $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$, 从而求得 $f(x)$ 的全部根 $-2, -2, \frac{3}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$.

七 求标准分解式

求标准分解式的问题，就是因式分解的问题。这在理论上已经解决，但实践上并未实现，因式分解的（实用）一般方法尚未解决，但是，我们可以通过降低次数的方法，将多项式的分解归结为较低次多项式的分解。降次的途径是：1) 分离重因式，2) 求有理根。对于具体的系数域而言，还可以考虑用一些具体的性质。

例10 求多项式 $f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$ 的标准分解式。

解 由 $f'(x) = 5x^4 - 30x^2 - 40x - 15$ ， $(f(x), f'(x)) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ 得， $g(x) = f(x)/(f(x), f'(x)) = x^2 - 3x - 4$ ，所以 $f(x)$ 的不可约因式为 $x - 4$ ， $x + 1$ 。但是， $(f(x), f'(x)) = (x + 1)^3$ ，所以，由重因式定理， $x + 1$ 是 $f(x)$ 的 4 重因式，因此， $f(x)$ 的标准分解式为 $f(x) = (x - 4)(x + 1)^4$ 。

例11 设 $f(x) = x^6 - 7x^5 + 13x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 13x + 3$ ，试求 $f(x)$ 在 \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} 、 \mathbf{C} 上的标准分解式。

解 求得 $f(x)$ 的有理根为 1, 3, 并且得到 $f(x) = (x - 1)(x - 3) \cdot (x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1)$ ，设 $g(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ ，则用中学数学里的分组分解法或前面已经用到过的待定系数法，得到 $g(x)$ 的分解式 $g(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - 4x + 1)$ 。

因此，得到 $f(x)$ 在 \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} 、 \mathbf{C} 上的标准分解式分别为

$$f(x) = (x - 1)(x - 3)(x^2 - 4x + 1)(x^2 + x + 1),$$
$$f(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})(x^2 + x + 1),$$
$$f(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})$$
$$[x + (1 - \sqrt{3}i)/2][x + (1 + \sqrt{3}i)/2]$$

例12 试求 $x^4 + 1$ 在下列数域上的标准分解式：1) $\mathbf{F}_1 = \mathbf{C}$ ，2) $\mathbf{F}_2 = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ ，3) $\mathbf{F}_3 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ ，4) $\mathbf{F}_4 = \{a + b\sqrt{2}i \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ ，5) $\mathbf{F}_5 = \mathbf{R}$ 。

解 1) $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$
 $= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) = \left[\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^2 \right]$
 $\left[\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^2 \right] = \left[x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \right] \left[x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \right]$
 $\left[x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \right] \left[x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \right].$

2) $x^4 + 1 = x^4 - i^2 = (x^2 + i)(x^2 - i)$. 下面证明 $x^2 + i$ 在 \mathbf{F}_2 上不可约. 若不然, 设 $x^2 + i = (x + \alpha)(x + \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{F}_2$, 则 $\alpha + \beta = 0$, $\alpha\beta = i$, 从而 $-\alpha^2 = i$. 再设 $\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbf{Q}$, 则 $-\alpha^2 = -a^2 - 2abi + b^2 = i$, 从而, $a^2 = b^2$, $-2ab = 1$. 当 $a = -b$ 时, $2b^2 = 1$, $b = \sqrt{1/2}$, 引出矛盾; 当 $a = b$ 时, $-2b^2 = 1$, 引出矛盾. 同样可以证明 $x^2 - i$ 不可约, 从略.

3) $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$. 关于因式不可约的证明, 从略.

4) $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}ix - 1)(x^2 - \sqrt{2}ix - 1)$. 关于因式不可约的证明, 从略.

5) $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$. 由 $(\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 = -2 < 0$, $(-\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 = -2 < 0$ 知, 因式在 \mathbf{R} 上不可约.

说明 1) 此例充分说明, 因式分解随数域的改变而改变;
 2) 必须证明分解得到的因式是不可约的.

八 对称多项式初等化

对称多项式初等化的一般步骤是: 1) 写出首项的指数组

(l_1, l_2, \dots, l_n) . 2) 作 $\phi_1 = a\sigma_1^{l_1 - l_2} \sigma_2^{l_2 - l_3} \dots \sigma_{n-1}^{l_{n-1} - l_n} \sigma_n^{l_n}$.

3) 若 $f_1 = f - \phi_1$ 已初等化, 则工作结束; 若还未初等化, 则对 f_1 重复上述过程, 直到 $f_k = f_{k-1} - \phi_k = \phi_{k+1}$ 初等化时, 工作结束. 4) 写出 $f = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_k + \phi_{k+1}$, 即为所求.

例13 把三元对称多项式 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1 - x_2 - x_3$ 初等化。

解 因首项为 x_1^3 , 其指数组是 $(3, 0, 0)$, 得 $\phi_1 = \sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0 = \sigma_1^3$, 所以 $f_1 = f - \phi_1 = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1 - x_2 - x_3) - (x_1 + x_2 + x_3)^3 = -3(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + \cdots) - 6x_1x_2x_3 - x_1 - x_2 - x_3$. f_1 的首项为 $-3x_1^2x_2$, 其指数组是 $(2, 1, 0)$, 得 $\phi_2 = -3\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 = -3\sigma_1\sigma_2 = -3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = -3(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + \cdots) - 9x_1x_2x_3$, 所以 $f_2 = f_1 - \phi_2 = 3x_1x_2x_3 - x_1 - x_2 - x_3 = 3\sigma_3 - \sigma_1 = \phi_3$. 因此, $f = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 - \sigma_1$.

对于齐次对称多项式 f , 可以采用较简单的方法——待定系数法, 进行初等化. 其步骤是: 1) 写出满足 $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_n$ 且 $l_1 + l_2 + \cdots + l_n = \deg(f)$ 的所有的有序数组 (l_1, l_2, \dots, l_n) . 2) 写出指数组 (l_1, l_2, \dots, l_n) 对应的 σ_i 的方幂乘积

$\sigma_1^{l_1-l_2} \sigma_2^{l_2-l_3} \cdots \sigma_{n-1}^{l_{n-1}-l_n} \sigma_n^{l_n}$. 3) 以 2) 中所得的一切项为项把 f 写为系数待定的式子. 4) 给 x_1, x_2, \dots, x_n 以适当的值, 确定待定的系数.

例14 把 n 元对称多项式 $f = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^2 x_j^2$ 初等化.

解 指数组及对应的 σ_i 方幂的乘积列如下:

$$(2, 2, 0, 0, \dots), \sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^{0-0}\cdots\sigma_n^0 = \sigma_2^2,$$

$$(2, 1, 1, 0, \dots), \sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0}\sigma_4^{0-0}\cdots\sigma_n^0 = \sigma_1\sigma_3,$$

$$(1, 1, 1, 1, \dots), \sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^{1-0}\sigma_5^{0-0}\cdots\sigma_n^0 = \sigma_4,$$

从而, f 可写为 $f = \sigma_2^2 + a\sigma_1\sigma_3 + b\sigma_4$. 取 $x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_4 = \cdots = x_n = 0$, 得 $f = 3, \sigma_1 = \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 1, \sigma_4 = 0$, 从而 $3 = 3^2 + a \cdot 3 \cdot 1 + b \cdot 0, a = -2$. 再取 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1, x_5 = \cdots = x_n = 0$, 得 $f = 6, \sigma_1 = 4, \sigma_2 = 6, \sigma_3 = 4, \sigma_4 = 1$, 从而 $6 = 6^2 + (-2) \cdot 4 \cdot 4 + b \cdot 1, b = 2$, 因此, $f = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4$.

例15 把3元对称多项式 $f=(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$ 初等化。

解 因为, f 的首项是 $x_1^4x_2^2$, 所以, 指数组及对应的 σ_i 方幂的乘积如下:

$$(4,2,0), \sigma_1^{4-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^0=\sigma_1^2\sigma_2^2,$$

$$(4,1,1), \sigma_1^{4-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1=\sigma_1^3\sigma_3,$$

$$(3,3,0), \sigma_1^{3-3}\sigma_2^{3-0}\sigma_3^0=\sigma_2^3,$$

$$(3,2,1), \sigma_1^{3-2}\sigma_2^{2-1}\sigma_3^1=\sigma_1\sigma_2\sigma_3,$$

$$(2,2,2), \sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-2}\sigma_3^2=\sigma_3^2,$$

从而, f 可写为 $f=\sigma_1^2\sigma_2^2+a\sigma_1^3\sigma_3+b\sigma_2^3+c\sigma_1\sigma_2\sigma_3+d\sigma_3^2$.

取 x_1, x_2, x_3 等于一些特殊值, 得下表

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	0	2	1	0	2
2	-1	-1	0	-3	2	50
1	-2	-2	-3	0	4	200
1	-1	-1	-1	-1	1	8

从而, 得到 $4+b=2$, $-27b+4d=50$, $-108a+16d=200$, $-a-b+c+d=7$, 由此解得 $a=-2$, $b=-2$, $c=4$, $d=-1$, 因此 $f=\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_1^3\sigma_3-2\sigma_2^3+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\sigma_3^2$.

例16 把3元对称多项式 $f=(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$ 初等化。

解1 f 是齐次对称多项式, 首项为 x^3 . 仿例14可解, 从略。

解2 因为 $\sigma_1=x+y+z$, 所以 $f=\sigma_1^3-(\sigma_1-2x)^3-(\sigma_1-2y)^3-(\sigma_1-2z)^3=\sigma_1^3-[3\sigma_1^3-6\sigma_1^2(x+y+z)+12\sigma_1(x^2+y^2+z^2)-8(x^3+y^3+z^3)]$.

因为, $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=\sigma_1^2$

$-2\sigma_2$; 又可求得 (参考例13) $x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$, 所以, $f = \sigma_1^3 - [3\sigma_1^3 - 6\sigma_1^3 + 12\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 8(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)] = 24\sigma_3$.

解3 当 $x=0$ 时, $f = (y+z)^3 - (y+z)^3 - (z-y)^3 - (y-z)^3 = 0$, 从而, f 含因式 x . 因为 f 是 x, y, z 的对称多项式, 所以 f 必含有因式 y 与 z , 从而可设 $f = xyz \cdot q(x, y, z) (*)$. 但 f 是 3 次齐次多项式, 所以 $q(x, y, z)$ 必是非零常数, 取 $x=y=z=1$ 代入 $(*)$ 式, 得 $q=24$, 因此 $f=24\sigma_3$.

说明 1) 解2说明, 可以采用灵活的步骤初等化, 特别是在一些结果已知或容易求得时, 较为方便. 2) 有时, 解3最简便, 但必须有理论上的保证, 这就是下面的定理: $x_n - g(x_1, \dots, x_{n-1})$ 整除 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的必要充分条件是:

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0.$$

II 证明题

一 多项式相等

证明多项式相等的基本出发点及一般方法是: 比较对应项的系数, 证明系数相等. 在证明过程中注意多项式的其它性质, 如次数, 根的个数, 等等. 证明多项式是零多项式时, 往往采用反证法, 利用根的个数定理引出矛盾.

例1 设 $f(x) \in F[x]$. 若对于任意的 $a, b \in F$, 都有 $f(a+b) = f(a) + f(b)$, 则 $f(x) = kx$, $k \in F$. 试证之.

证明 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, 则只需证明 $a_n = a_{n-1} = \dots = a_2 = a_0 = 0$.

取 $a=b=0$, 由条件得 $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, 从而 $f(0) = 0$. 但 $f(0) = a_0$, 所以 $a_0 = 0$.

由条件可推得, 对于任意正整数 r , 成立

$$f(r) = f(1+1+\dots+1) = f(1) + f(1) + \dots + f(1) = rf(1).$$

即

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r$$

$$=r(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1),$$

从而 $a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + \cdots + a_2 r + [a_1 - (a_n + \cdots + a_1)] = 0$.
因为 r 可取 $1, 2, \cdots, m, \cdots$ 无穷多个数, 所以由根的个数定理得 $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = 0$.

说明 1) 本例从比较系数出发, 利用根的个数定理; 2) 类似的方法可证明: 设 $f(x) \in \mathbf{F}[x]$. 若有 $c \in \mathbf{F}$, $c \neq 0$, 满足 $f(x+c) = f(x)$, 则 $f(x) = k$, $k \in \mathbf{F}$.

例2 证明: 设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbf{R}[x]$. 若 $f^2(x) = xg^2(x) + xh^2(x)$, 则 $f(x) = g(x) = h(x) = 0$.

分析 因为, $f(x), g(x), h(x)$ 都是实系数多项式, 所以, 当 $f^2(x) = xg^2(x) + xh^2(x) \neq 0$ 时, 右端的首项必为奇次的, 将导致矛盾. 于是, 很容易想到, 从次数出发讨论问题.

证明 要证 $f(x) = g(x) = h(x) = 0$, 只要证明 $g(x) = h(x) = 0$. 采用反证法. 若不然, 则 $g(x), h(x)$ 中至少有一个不为零, 不妨设 $g(x) \neq 0$.

当 $h(x) = 0$ 时, $\deg(xg^2(x)) = \deg(x) + 2\deg(g(x))$, 从而 $f(x) \neq 0$. 但 $\deg(f^2(x)) = 2\deg(f(x))$, 引出矛盾.

当 $h(x) \neq 0$ 时, $xg^2(x)$ 与 $xh^2(x)$ 都是首项系数为正实数的奇次多项式, 所以, 不论它们次数是否相等, $xg^2(x) + xh^2(x)$ 都是奇次多项式. 但是, 此时 $f(x) \neq 0$, 且 $f^2(x)$ 是偶次多项式, 引出矛盾.

因此, 该命题得证.

说明 1) 在复数域 \mathbf{C} 中, 此命题不成立, 例如, $f(x) = 0$, $g(x) = ix$, $h(x) = x$; 2) 在一般数域 \mathbf{F} 中, 下列命题成立: 若 $f(x), g(x) \in \mathbf{F}[x]$, 且 $f^2(x) = xg^2(x)$, 则 $f(x) = g(x) = 0$; 3) 此命题可推广为: 若 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbf{R}[x]$, 且 $f^{2k}(x) = x^{2l+1}g^{2m}(x) + x^{2n+1}h^{2s}(x)$, 其中 k, l, m, n, s 均为非负整数, 则 $f(x) = g(x) = h(x) = 0$; 4) 此命题还可以推广为: 若

$f(x), g_i(x) (i=1, 2, \dots, t) \in \mathbf{R}[x]$, 且 $f^2(x) = xg_1^2(x) + \dots + xg_t^2(x)$, 则 $f(x) = g_1(x) = \dots = g_t(x) = 0$.

二 最大公因式、互素

在证明中, 除灵活使用定义及有关性质外, 还要注意使用组合的式子 $f(x)u(x) + g(x)v(x) = (f(x), g(x))$, 特别是关于互素的式子 $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$.

例 3 证明: $(f(x)h(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))h(x)$, 其中 $h(x)$ 为首 1 多项式.

证明 设 $(f(x), g(x)) = d(x)$, 则有 $u(x), v(x)$, 使 $f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x)$, 两边同乘以 $h(x)$, 得

$$(f(x)h(x))u(x) + (g(x)h(x))v(x) = d(x)h(x) \quad (*)$$

因为: 1) 由 $d(x) | f(x), d(x) | g(x)$ 得 $d(x)h(x) | f(x)h(x), d(x)h(x) | g(x)h(x)$; 2) 对于任意 $\phi(x)$, 若 $\phi(x) | f(x)h(x), \phi(x) | g(x)h(x)$, 则由 (*) 知, $\phi(x) | d(x)h(x)$; 所以, $d(x)h(x)$ 是 $f(x)h(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 的一个最大公因式.

最后, 因为 $h(x)$ 是首 1 多项式, 所以, $(f(x)h(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))h(x)$.

说明 此例紧扣最大公因式的定义, 利用组合的式子, 得以证明.

例 4 证明: 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 则 $(f^2(x) - 4g^2(x), g(x)) = 1$.

分析 由 $f^2(x) - 4g^2(x) = (f(x) + 2g(x))(f(x) - 2g(x))$ 知, 先证 $(f(x) + 2g(x), g(x)) = 1, (f(x) - 2g(x), g(x)) = 1$, 再由互素性质得出.

证明 由 $(f(x), g(x)) = 1$ 得, $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$. 从而变形得, $(f(x) + 2g(x))u(x) + g(x)(v(x) - 2u(x)) = 1$, $(f(x) - 2g(x))u(x) + g(x)(v(x) + 2u(x)) = 1$, 所以, $(f(x)$

$+2g(x)$, $g(x))=1$, $(f(x)-2g(x), g(x))=1$. 因此, 由互素的性质得到, $(f^2(x)-4g^2(x), g(x))=1$.

例 5 证明: 若 $a, b, c, d \in F$, 且 $ad-bc \neq 0$, $f(x), g(x) \in F[x]$, 则 $(f(x), g(x)) = (af(x)+bg(x), cf(x)+dg(x))$.

证明 设 $f_1(x) = af(x)+bg(x)$, $g_1(x) = cf(x)+dg(x)$. (*)

因为, $(f(x), g(x))$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式, 所以, 由最大公因式的定义与整除的性质, 根据 (*) 得, $(f(x), g(x))$ 是 $f_1(x)$ 与 $g_1(x)$ 的公因式, 再由最大公因式的定义得, $(f(x), g(x)) | (f_1(x), g_1(x))$.

由 (*) 变形得, $f(x) = (ad-bc)^{-1} (df_1(x)-bg_1(x))$, $g(x) = (ad-bc)^{-1} (ag_1(x)-cf_1(x))$, 从而, 同上可得, $(f_1(x), g_1(x)) | (f(x), g(x))$.

因此, 由 $(f(x), g(x))$, $(f_1(x), g_1(x))$ 的约定, 及整除的性质得 $(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$.

说明 1) 证明本例必须熟知最大公因式的概念及整除的性质; 2) 通过证明互相整除来证明两多项式相等, 是一个重要的方法, 这也是对第一部分证明题的一个补充; 3) 当 $a=1, b=0, c=1, d=\pm 1$ 时, $ad-bc=\pm 1 \neq 0$, 本例变为熟知的 $(f(x), g(x)) = (f(x), f(x) \pm g(x))$; 4) 注意, 当 $ad-bc=0$ 时, 命题不成立, 例如 $f(x)=x, g(x)=-x, a=b=1, c=d=0$ 时, 即为一反例.

三 整除

关于整除的题目较多, 综合性较强, 方法也较为灵活. 现概括为四个方面: 1) 利用多项式整除的定义及判定定理, 2) 利用多项式的最大公因式及多项式互素的性质, 3) 利用不可约多项式的性质, 4) 利用多项式的根及单位根的性质.

例6 证明: 若 $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x) \in F[x]$, $f_1(x) \neq 0$, $g_1(x)g_2(x) \mid f_1(x)f_2(x)$, $f_1(x) \mid g_2(x)$, 则 $g_1(x) \mid f_2(x)$.

证明 因为, $g_1(x)g_2(x) \mid f_1(x)f_2(x)$, $f_1(x) \mid g_2(x)$, 所以, 根据整除的定义, 可设 $f_1(x)f_2(x) = g_1(x)g_2(x)h(x)$, $g_2(x) = f_1(x)l(x)$, 从而 $f_1(x)f_2(x) = g_1(x)f_1(x)l(x)h(x)$. 又因为, $f_1(x) \neq 0$, 所以, 上式两端消去 $f_1(x)$, 得到 $f_2(x) = g_1(x)l(x)h(x)$, 再由整除定义, $g_1(x) \mid f_2(x)$.

说明 本例并不困难, 容易直观地被接受, 但是, 头绪较多, 要严格证明, 就必熟悉整除的定义及多项式乘法消去律, 并且细心推导.

例7 $g^2(x) \mid f^2(x)$ 当且仅当 $g(x) \mid f(x)$.

证明1 充分性容易证明, 从略. 下面证明必要性.

若 $f(x) = 0$, 则显然就有 $g(x) \mid f(x)$.

若 $f(x) \neq 0$, 则 $g(x) \neq 0$, 从而 $(f(x), g(x)) = d(x) \neq 0$. 设 $f(x) = d(x)f_1(x)$, $g(x) = d(x)g_1(x)$, 则 $(f_1(x), g_1(x)) = 1$, 并且 $f^2(x) = d^2(x)f_1^2(x)$, $g^2(x) = d^2(x)g_1^2(x)$. 由 $g^2(x) \mid f^2(x)$, $d(x) \neq 0$ 得, $g_1^2(x) \mid f_1^2(x)$. 因为 $(g_1(x), f_1(x)) = 1$, 所以 $g_1(x) \mid f_1(x)$, 从而 $g_1(x) = c$, c 为非零常数. 因此 $g(x) = cd(x)$, $g(x) \mid f(x)$.

证明2 充分性容易证明, 从略. 下面证明必要性.

若 $f(x) = 0$, 则显然有 $g(x) \mid f(x)$.

$f(x) \neq 0$, 则 $g(x) \neq 0$, 从而可设 $f(x) = ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x) \cdots p_r^{k_r}(x)$, $g(x) = bp_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x) \cdots p_r^{l_r}(x)$, 其中 $p_1(x), p_2(x) \cdots, p_r(x)$ 是互异的首1不可约多项式, $k_i, l_i (i=1, 2, \cdots, r)$ 为非负整数, 则有, $f^2(x) = a^2p_1^{2k_1}(x)p_2^{2k_2}(x) \cdots p_r^{2k_r}(x)$, $g^2(x) = b^2p_1^{2l_1}(x)p_2^{2l_2}(x) \cdots p_r^{2l_r}(x)$. 由

$g^2(x) \mid f^2(x)$ 及不可约多项式的性质得, $2l_i \leq 2k_i$, $l_i \leq k_i$, $i=1, 2, \dots, r$. 因此, $g(x) \mid f(x)$.

说明 1) 本例容易推广为: $g^m(x) \mid f^m(x)$ 当且仅当 $g(x) \mid f(x)$, 其中 m 是正整数; 2) 利用此例可以证明: 若 $d(x) \mid f^2(x)$, $d(x) \mid g^2(x)$, 则 $d(x) \mid f(x)g(x)$. 进一步还可证明: $(f^2(x), g^2(x)) = (f^2(x), f(x)g(x), g^2(x))$; 3) 证明 2 的实质是应用多项式的标准分解式来讨论整除的问题.

例 8 设 $f(x), g(x), h(x), l(x)$ 满足 $(x^2+1)h(x) + (x+1)f(x) + (x+2)g(x) = 0$, $(x^2+1)l(x) + (x-1)f(x) + (x-2)g(x) = 0$, 证明 x^2+1 整除 $f(x)$ 与 $g(x)$.

证明 对所给的两式相加得 $(x^2+1)(h(x)+l(x)) + 2x(f(x)+g(x)) = 0$, 从而 $(x^2+1) \mid 2x(f(x)+g(x))$, 但 $(x^2+1, 2x) = 1$, 所以 $(x^2+1) \mid (f(x)+g(x))$.

两式相减, 同理证得 $(x^2+1) \mid (2f(x)+4g(x))$.

综合以上两条, 易证得 $(x^2+1) \mid f(x)$, $(x^2+1) \mid g(x)$.

例 9 证明 $(x^2+x+1) \mid (x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3s+2})$, 其中 m, n, s 是任意非负整数.

证明 1 因为, $x^{3m}-1 = (x^3-1)((x^3)^{m-1} + \dots + x^3 + 1)$, $m \geq 2$, 所以 $(x^3-1) \mid (x^{3m}-1)$, 而当 $m=0, m=1$ 时, 显然有 $(x^3-1) \mid (x^{3m}-1)$. 同理, $(x^3-1) \mid (x^{3n}-1)$, $(x^3-1) \mid (x^{3s}-1)$. 又因为, $(x^{3n}-1) \mid (x^{3n+1}-x)$, $(x^{3s}-1) \mid (x^{3s+2}-x^2)$, 并且 $(x^2+x+1) \mid (x^3-1)$, 所以, 由整除的传递性, 得, $(x^2+x+1) \mid (x^{3m}-1)$, $(x^2+x+1) \mid (x^{3n+1}-x)$, $(x^2+x+1) \mid (x^{3s+2}-x^2)$. 但是 $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3s+2} = (x^{3m}-1) + (x^{3n+1}-x) + (x^{3s+2}-x^2) + (x^2+x+1)$, 因此, $(x^2+x+1) \mid (x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3s+2})$.

证明 2 记 $f(x) = x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3s+2}$.

在复数域 \mathbb{C} 中考虑, 设 e_1, e_2 是 x^2+x+1 的二根, 则 e_1^3

$=\varepsilon_2^3=1$, 且 $x^2+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)$. $f(\varepsilon_1)=\varepsilon_1^{3m}+\varepsilon_1^{3n+3}+\varepsilon_1^{3s+2}=(\varepsilon_1^3)^m+(\varepsilon_1^3)^n\varepsilon_1+(\varepsilon_1^3)^s\varepsilon_1^2=1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^2=0$. 同样, $f(\varepsilon_2)=0$. 所以 $(x-\varepsilon_1)|f(x)$, $(x-\varepsilon_2)|f(x)$. 因为, $(x-\varepsilon_1, x-\varepsilon_2)=1$, 所以, $(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)|f(x)$, 即 $(x^2+x+1)|(x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3s+2})$.

因为, 两个多项式的整除性不因数域的扩大而改变, 所以, 在原来的数域中结论成立.

说明 1) 证明 1 仅用到整除的性质, 但需要适当变形, 并添加适当的项, 技巧性较强; 2) 证明 2 是把问题放在复数域中来考虑, 这是一种思想方法.

四 不可约多项式

证明一个多项式是不可约多项式, 往往用反证法. 对于有理数域上的多项式, 还可以考虑用艾森斯坦因判别法.

例10 证明: 设 $p(x)$ 是 $F[x]$ 中次数 >0 的多项式, 且对于任意 $f(x) \in F[x]$, 都有 $p(x)|f(x)$ 或 $(p(x), f(x))=1$, 则 $p(x)$ 是 F 上的不可约多项式.

证明 用反证法. 设 $p(x)$ 可约, 则有 $p_1(x), p_2(x) \in F[x]$, 使 $p(x)=p_1(x)p_2(x)$, 且 $0 < \deg(p_1(x)) < \deg(p(x))$, $0 < \deg(p_2(x)) < \deg(p(x))$. 取 $f(x)=p_1(x)$, 则 $p(x) \nmid f(x)$, 且 $(p(x), f(x))=cp_1(x) \neq 1$, 引出矛盾. 因此, $p(x)$ 是 F 上的不可约多项式.

例11 证明: 若 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$, 其中 a_1, a_2, \dots, a_n 是两两不等的整数, 则 $f(x)$ 在 \mathbb{Q} 上不可约.

证明 用反证法. 若 $f(x)$ 在 \mathbb{Q} 上可约, 则 $f(x)$ 在 \mathbb{Z} 上可约, 从而 $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $g(x), h(x)$ 都是整系数多项式, 且次数均 >0 而 $<n$.

由条件得 $g(a_i)h(a_i)=-1$, 从而 $g(a_i)=1, h(a_i)=-1$ 或 $g(a_i)=-1, h(a_i)=1, i=1, 2, \dots, n$. 所以 $g(a_i)+h(a_i)=0$

($i=1, 2, \dots, n$), 因此, $g(x)+h(x)$ 有 n 个两两不等的根 a_1, a_2, \dots, a_n . 但是, 当 $g(x)+h(x) \neq 0$ 时, $\deg(g(x)+h(x)) < n$, 所以, 由根的个数定理, 必有 $g(x)+h(x)=0$, $g(x) = -h(x)$, $f(x) = -g^2(x)$, $f(x)$ 首项系数为 1, 而 $-g^2(x)$ 的首项系数为负数, 引出矛盾. 因此, $f(x)$ 在 \mathbb{Q} 上不可约.

例12 证明 x^4+1 在 \mathbb{Q} 上不可约.

证明 1 用反证法. 设 x^4+1 在 \mathbb{Q} 上可约, 则其分解式可能有如下两种情况:

1) 含有一次因式. 不妨设 $x^4+1 = (x+a)(x^3+bx^2+cx+d) = x^4 + (a+b)x^3 + (ab+c)x^2 + (ac+d)x + ad$, 而 $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. 由多项式相等的定义得, $a+b=0, ab+c=0, ac+d=0, ad=1$, 从而, $a=-b, c=-ab=b^2, d=-ac=b^3, ad=-b^4=1$, 但 $b^4 \geq 0$, 引出矛盾 (或, 此时有有理根 $-a, (-a)^4 = -1$ 引出矛盾).

2) 仅有二次因式. 不妨设 $x^4+1 = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d) = x^4 + (a+c)x^3 + (ac+b+d)x^2 + (ad+bc)x + bd$, 而 $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. 由多项式相等的定义得, $a+c=0, ac+b+d=0, ad+bc=0, bd=1$, 从而 $a=-c, b=-d+c^2, bc=dc$. 当 $c=0$ 时, $b=-d, -d^2=1$, 引出矛盾; 当 $c \neq 0$ 时, $b=d, d^2=1, d=\pm 1, c^2=2b=\pm 2$, 引出矛盾.

因此, x^4+1 在 \mathbb{Q} 上不可约.

证明 2 设 $x=y+1$, 则 $g(y)=f(x)=f(y+1)=(y+1)^4+1=y^4+4y^3+6y^2+4y+2$. 取素数 $p=2$, 由艾森斯坦因判别法知, $g(y)$ 于 \mathbb{Q} 上不可约, 从而 $f(x)$ 于 \mathbb{Q} 上不可约.

说明 1) 证明 1 仅用了基本概念, 但较复杂; 2) 证明 2 较简单, 较好, 但用了特殊的判别法.

例13 设 p 是素数, 证明 $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^p}{p!}$ 在 \mathbb{Q} 上

不可约.

证明 $g(x) = (p!)f(x) = p! + p!x + \frac{p!}{2!}x^2 + \cdots + x^p = x^p + px^{p-1} + \cdots + (3 \cdot 4 \cdots p)x^2 + (p!)x + p!$. 取素数 p , 由艾森斯坦因判别法知, $g(x)$ 于 \mathbf{Q} 上不可约. 再由不可约多项式的性质知, $f(x)$ 于 \mathbf{Q} 上不可约.

五 重因式、重根

证明 $f(x)$ 有无重因式的问题, 要从 $(f(x), f'(x))$ 出发. 重根的问题归结为重因式问题, 但要注意应用根的性质.

例14 证明 $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 没有重因式.

证明 $f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, $f(x) - f'(x) = \frac{x^n}{n!}$, 从而, 易证得 $(f(x), f'(x)) = (f(x), \frac{x^n}{n!})$. $\frac{x^n}{n!}$ 只有 ax^i ($a \in \mathbf{F}$, $a \neq 0$, $0 \leq i \leq n$) 型的因式, 但其中只有 $ax^0 = a$ 整除 $f(x)$, 所以 $(f(x), \frac{x^n}{n!}) = 1$, $(f(x), f'(x)) = 1$, 因此, $f(x)$ 没有重因式.

例15 证明 $f(x) = x^n + ax^{n-m} + b$ ($n > m > 0$) 的非零根的重数 ≤ 2 .

证明 $f'(x) = nx^{n-1} + a(n-m)x^{n-m-1} = x^{n-m-1}g(x)$, 而 $g(x) = nx^m + a(n-m)$, 则 $f'(x)$ 的非零根必为 $g(x)$ 的根. 但 $g'(x) = nm x^{m-1}$, 所以 $g(x)$ 没有非零重根, 即 $f'(x)$ 的非零根均为单根. 因此, $f(x)$ 的非零根的重数 ≤ 2 .

例16 证明多项式 $f(x) = x^3 + px + q$ 有重因式的必要充分条件是 $4p^3 + 27q^2 = 0$.

证明 1 $f(x) = x^3 + px + q$ 有重因式的必要充分条件是 $(f(x), f'(x)) \neq 1$. $f'(x) = 3x^2 + p$, 分两种情况讨论.

1) 若 $(f(x), f'(x)) = \frac{1}{3}f'(x) = x^2 + \frac{p}{3}$, 则有 $x^2 + \frac{p}{3}$

$\mid f(x)$, 用 $x^2 + \frac{p}{3}$ 除 $f(x)$ 得余式 $\frac{2p}{3}x + q$, 所以 $\frac{2p}{3}x + q = 0$,

从而 $p = q = 0$.

2) 若 $(f(x), f'(x)) = x + \alpha$, α 是某一常数, 则由辗转相除法得 $f(x) = \frac{1}{3}xf'(x) + \left(\frac{2p}{3}x + q\right)$, $f'(x) = \left(\frac{q}{2p}x - \frac{27q}{4p^2}\right) \cdot \left(\frac{2p}{3}x + q\right) + \left(p + \frac{27q^2}{4p^2}\right)$, 从而, $\alpha = \frac{3q}{2p}$, 且 $p + \frac{27q^2}{4p^2} = 0$, 即 $4p^3 + 27q^2 = 0$.

因此, $f(x)$ 有重因式的必要充分条件是 $4p^3 + 27q^2 = 0$.

证明 2 显然, 三次多项式的重因式必是一次式, 所以, $f(x) = x^3 + px + q$ 有重因式的必要充分条件是 $f(x)$ 有重根.

α 是 $f(x) = x^3 + px + q$ 的重根 $\Leftrightarrow f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0$, 即 $\alpha^3 + p\alpha + q = 0, 3\alpha^2 + p = 0$, 从而 $\alpha^3 + p\alpha + q = \alpha(\alpha^2 + p) + q = \alpha(-p/3 + p) + q = (2p/3)\alpha + q \Leftrightarrow 2p\alpha + 3q = 0, \alpha^2 = -(p/3) \Leftrightarrow p = q = 0$ 或 $p \neq 0$ 时 $\left(-\frac{3q}{2p}\right)^2 = -\frac{p}{3}$, 即 $4p^3 + 27q^2 = 0$.

因此, $f(x)$ 有重因式 $\Leftrightarrow 4p^3 + 27q^2 = 0$.

证明 3 设 x_1, x_2, x_3 是 $f(x) = x^3 + px + q$ 在复数域 \mathbb{C} 中的三个根, 则由韦达定理得, $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0, \sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p, \sigma_3 = x_1x_2x_3 = -q$. 再研究 x_1, x_2, x_3 的对称多项式 $(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2$, 初等化得, $(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2 = -4p^3 - 27q^2$.

$f(x)$ 有重根 $\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2 = 0 \Leftrightarrow 4p^3 + 27q^2 = 0$.

因为多项式是否有重因式不因数域的扩大而改变, 所以 $f(x) = x^3 + px + q$ 在原来所给的数域上有重因式 $\Leftrightarrow 4p^3 + 27q^2 = 0$. 命题得证.

六 多项式的根

有关根的证明题，主要是利用根的各种性质，尤其是根的个数 \leq 多项式次数这条性质；还要注意与整除、最大公因式等的联系。

例17 证明 $\sin x$ 在实数域上不能表成 x 的多项式。

证明 1 用反证法。设 $\sin x$ 能表成 x 的多项式 $f(x)$ ，则由 $\sin x$ 不是常数函数知， $f(x) \neq 0$ ，从而 $f(x)$ 至多有有限个根。但是， \sin 有无穷多个根 $k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)，引出矛盾。因此， $\sin x$ 不能表成 x 的多项式。

证明2 用反证法。设 $\sin x$ 能表成 x 的多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ ，则由 $\sin x$ 不是常数函数知， $f(x) \neq 0$ ，从而可设 $a_n \neq 0$ 。

$(\sin x)' = \cos x = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$ 。因为， $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ，所以 $\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}\right)^2 = 1$ ，从而，根据多项式相等的定义得， n 必须等于零，并且 $a_0^2 = 1$ ，即 $a_0 = \pm 1$ ，就得到 $\sin x = 1$ 或 -1 ，引出矛盾。因此， $\sin x$ 不能表成 x 的多项式。

说明 1) 众所周知， $\sin x$ 是一个三角函数，从而，有人会认为本例不证自明。实际上，这样就没有理解本例的实质含义。所谓 $\sin x$ 不能表成 x 的多项式，就是说，三角函数 $\sin x$ 不能与任何一个实多项式函数相等，从而，这结论并不是显然的；2) 同样地，其它的三角函数也均不能表成 x 的多项式。

例18 若实系数多项式 $f(x)$ 无实根，且 $f(x)$ 的首项系数为1，则有实系数多项式 $g(x)$ ， $h(x)$ ，使得 $f(x)=g^2(x)+h^2(x)$ 。

分析 由条件知， $f(x)$ 的根共轭成对出现；由结论知，需要有 $g(x)+ih(x)$ ， $g(x)$ ， $h(x)$ 是实系数多项式，从而，就得出证明。

证明 由于， $f(x)$ 的首项系数为1，无实根，所以， $f(x)$

$= (x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1)(x - \alpha_2)(x - \bar{\alpha}_2) \cdots (x - \alpha_s)(x - \bar{\alpha}_s)$. 记 $\phi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_s) = g(x) + ih(x)$, 其中 $g(x)$, $h(x)$ 均为实系数多项式, 则 $(x - \bar{\alpha}_1)(x - \bar{\alpha}_2) \cdots (x - \bar{\alpha}_s) = \bar{\phi}(x) = g(x) - ih(x)$. 所以, $f(x) = \bar{\phi}(x)\phi(x) = (g(x) + ih(x))(g(x) - ih(x)) = g^2(x) + h^2(x)$.

说明 利用本例, 可以证明下面较复杂的命题: 若 $f_1(x)$, $f_2(x), \dots, f_t(x)$ 是实系数多项式, 则有实系数多项式 $g(x)$, $h(x)$, 使得 $f_1^2(x) + f_2^2(x) + \cdots + f_t^2(x) = g^2(x) + h^2(x)$.

七 多元多项式

关于多元多项式的习题, 证明时主要考虑使用多元多项式的基本概念及基本性质.

例19 证明: 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n), g(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, 且 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$. 若对于任意 $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbf{F}$, 均有, 当 $f(k_1, k_2, \dots, k_n) \neq 0$ 时, 必 $g(k_1, k_2, \dots, k_n) = 0$, 则 $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

证明 因为, 对于任意 $a_i \in \mathbf{F} (i=1, 2, \dots, n)$, 总有 $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ 或 $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$, 所以, 根据题设, 总有 $f(a_1, a_2, \dots, a_n)g(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, 从而, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. 又因为, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$, 所以, 由消去律就得到 $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

说明 本例是一个很有用的命题, 应注意在以后的某些章中的应用.

八 对称多项式

关于对称多项式的习题, 证明时主要考虑使用对称多项式的基本概念及对称多项式基本定理.

例20 设 $g(x) \in \mathbf{Q}[x]$, $g(x) \neq 0$, α 为 $f(x) = x^n - a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 的根, 证明 $g(\alpha) = 0$.

$+ \cdots + (-1)^n a_n$ 的根, $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. 若 $f(x)$ 的 n 个根都不是 $g(x)$ 的根, 则可以将分数 $1/g(\alpha)$ 写为分母为有理数的分数.

证明 设 $f(x)$ 的 n 个根为 $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 则由条件知, $g(\alpha_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, 从而,

$$\frac{1}{g(\alpha)} = \frac{g(\alpha_2) \cdots g(\alpha_n)}{g(\alpha_1)g(\alpha_2) \cdots g(\alpha_n)}.$$

因为, $h = g(x_1)g(x_2) \cdots g(x_n)$ 显然是 \mathbb{Q} 上的一个 n 元对称多项式, 所以, 由对称多项式基本定理, h 可以写为初等对称多项式的有理系数多项式. 又, $g(\alpha_1)g(\alpha_2) \cdots g(\alpha_n)$ 是 $x_i = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 时 h 的值, 且由韦达定理, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = a_1, \dots, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = a_n$, 所以 $g(\alpha_1)g(\alpha_2) \cdots g(\alpha_n)$ 是有理数.

说明 由本例可以设计一种分母有理化的方法.

§5 补充资料

I 最小公倍式

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. 若存在 $m(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得, 1) $f(x) | m(x)$, $g(x) | m(x)$; 2) 对于任意 $n(x) \in \mathbb{F}[x]$, $f(x) | n(x)$, $g(x) | n(x) \Rightarrow m(x) | n(x)$, 则称 $m(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的一个最小公倍式.

$[f(x), g(x)]$ 表示 $f(x), g(x)$ 的首项系数为 1 的最小公倍式.

$f(x), g(x)$ 的最小公倍式在不计非零常数因式差别的情况下是唯一的.

设 $d(x), m(x)$ 分别是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式与最小公倍式, 则有非零常数 c , 使 $d(x)m(x) = cf(x)g(x)$. 特别地, 当 $f(x), g(x)$ 均为首 1 多项式时, 有 $(f(x), g(x))[f(x), g(x)] = f(x)g(x)$.

若 $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, 则 $m(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的最小公倍式 $\Leftrightarrow (m(x)/f(x), m(x)/g(x)) = 1$.

对于 $f_1(x)$, $f_2(x)$, \dots , $f_s(x)$ 的最小公倍式, 可以类似地进行讨论.

I 整数的整除理论与因数分解理论

一 整除

设 a, b 是两个整数. 若有 $d \in \mathbb{Z}$, 使 $b = ad$, 则称 a 整除 b , 记为 $a | b$. 否则, 即对任意 $d \in \mathbb{Z}$, 均有 $b \neq ad$, 则称 a 不整除 b , 记为 $a \nmid b$. 当 $a | b$ 时, 称 a 是 b 的一个因数, b 是 a 的一个倍数.

整除有下列性质: 1) $a | b, b | c \Rightarrow a | c$; 2) $a | b, a | c \Rightarrow a | (b + c)$; 3) $a | b, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a | bc$; 4) $a | b_i, c_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, t \Rightarrow a | (c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_t b_t)$; 5) 对任意 $a \in \mathbb{Z}, 1 | a, (-1) | a$; 6) 对任意 $a \in \mathbb{Z}, a | a, (-a) | a, a | (-a)$; 7) $a | b$ 且 $b | a \Leftrightarrow a = b$ 或 $a = -b$; 8) 对任意 $a \in \mathbb{Z}, a | 0$; 9) $0 | a \Leftrightarrow a = 0$; 10) $a | b \Leftrightarrow (-a) | b \Leftrightarrow a | (-b) \Leftrightarrow (-a) | (-b)$.

带余除法. 设 $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$, 则有唯一的 $q, r \in \mathbb{Z}$, 使 $b = aq + r, 0 \leq r < |a|$. 称 q 为商, r 为余数. 从而, 当 $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ 时, $a | b \Leftrightarrow a$ 除 b 所得余数 $r = 0$.

二 最大公因数、互素、最小公倍数

设 $a, b \in \mathbb{Z}$. 若有 $d \in \mathbb{Z}$, 使得, 1) $d | a, d | b$; 2) $c \in \mathbb{Z}, c | a, c | b \Rightarrow c | d$, 则称 d 是 a, b 的一个最大公因数.

简单性质: 1) a, b 的最大公因数是 $0 \Leftrightarrow a = b = 0$; 2) $1, a$ 的最大公因数是 ± 1 ; 3) $a | b \Leftrightarrow a, b$ 的最大公因数是 $\pm a$.

任意整数 a, b 均有最大公因数, 且 a, b 的最大公因数在不计符号的情况下是唯一的.

用 (a, b) 表示 a, b 的非负的最大公因数.

对任意 $a, b \in \mathbb{Z}$, 有 $s, t \in \mathbb{Z}$, 使得 $as + bt = (a, b)$.

若 $(a, b) = 1$, 则称 a, b 互素, 也记为 $(a, b) = 1$.

a, b 互素 \Leftrightarrow 有 $s, t \in \mathbb{Z}$, 使得 $as + bt = 1$.

设 $a, b \in \mathbb{Z}$. 若有 $m \in \mathbb{Z}$, 使得, 1) $a|m, b|m$; 2) $h \in \mathbb{Z}$, $a|h, b|h \Rightarrow m|h$, 则称 m 是 a, b 的一个最小公倍数.

用 (a, b) 表示 a, b 的非负的最小公倍数.

$|ab| = (a, b)(a, b)$.

关于多个整数的情况, 可以类似地进行讨论.

三 素数

设 p 是大于1的整数. 若 p 的正因数仅有1与 p , 则称 p 是素数(质数). 否则, 称 p 为合数.

设 $a > 1$, 则存在 a 的大于1的最小因数, 且该因数是素数. 从而, 当 $a > 1$ 时, a 必有素因数.

素数有无穷多个.

素数的性质: 1) 大于1的整数 p 是素数 \Leftrightarrow 对任意 $a \in \mathbb{Z}$, 有且仅有 $(a, p) = 1$ 与 $p|a$ 之一; 2) 大于1的整数 p 是素数 \Leftrightarrow 对任意 $a, b \in \mathbb{Z}$, 由 $p|ab$ 得 $p|a$ 或 $p|b$; 3) p 是素数, $p|a_1 a_2 \cdots a_s \Rightarrow p$ 至少整除 a_1, a_2, \cdots, a_s 之一.

四 唯一因子分解

设 a 是大于1的整数, 则 a 可以表示为素数的积, 且在不计因子次序时表示方法唯一.

当 $a > 1$ 时, $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ 称为 a 的标准分解式(典型分解式), 其中 p_1, p_2, \cdots, p_s 是互异素数, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 均为正整数.

II 实根的界与个数

设 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{R}[x]$, $A = \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|)$, 则 $N = 1 + A/|a_0|$ 是 $f(x)$ 的正实根的上界.

设 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{R}[x]$, $a_0 > 0$, $a_1, \cdots, a_{k-1} \geq 0, a_k < 0$, B 是负系数的绝对值中最大的数, 则

$1 + \sqrt{B/a_0}$ 是正实根的上界。

利用根的变换，可以由正实根的上界求得正实根的下界及负实根的上下界。

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f(x), \quad f_1(x) = f'(x), \\ f_0(x) &= f_1(x)q_1(x) - f_2(x), \\ f_1(x) &= f_2(x)q_2(x) - f_3(x), \\ &\dots\dots\dots \\ f_{s-2}(x) &= f_{s-1}(x)q_{s-1}(x) - f_s(x), \\ f_{s-1}(x) &= f_s(x)q_s(x). \end{aligned}$$

多项式组 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_s(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的斯图姆组。

对于有限个实数组成的有序组，若其中有两个相邻的实数符号相反，则称该组中出现了一个变号。该组中变号的总数，称为该组的变号数。

多项式 $f(x)$ 的斯图姆组中的全体多项式在 $x=c$ 时的值组成的实数组 $f_0(c), f_1(c), \dots, f_s(c)$ 的变号数，称为 $f(x)$ 在 c 点的变号数，记为 $V(c)$ 。

斯图姆定理。设 $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ 没有重根， $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ ，且 a, b 都不是它的根，则 $f(x)$ 在 (a, b) 内实根的个数等于 $V(a) - V(b)$ 。

笛卡尔符号法则。实系数多项式 $f(x)$ 的正根个数（重根按重数计算）或者等于 $f(x)$ 的系数组的变号数，或者比变号数少一个正偶数。

IV 多元多项式的整除与因式分解

仅在 $\mathbf{F}(x, y)$ 中讨论。

$\mathbf{F}(x, y)$ 中非零多项式 $f(x, y)$ 按 x 的降幂排列写成： $f(x, y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \dots + a_n(y)$ ，其中 n 是非负整数，则称 n 是 $f(x, y)$ 关于 x 的次数，记为 $\deg_x(f(x, y))$ 。

设 $f(x, y), g(x, y) \in F[x, y]$, $g(x, y) \neq 0$, 则存在 $q(x, y), r(x, y) \in F[x, y], \phi(y) \in F(y)$, 使得 $\phi(y)f(x, y) = g(x, y)q(x, y) + r(x, y)$, 其中 $r(x, y) = 0$ 或 $\deg_x(r(x, y)) < \deg_x(g(x, y))$.

设 $f(x, y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \cdots + a_n(y)$. 若 $F[y]$ 中多项式 $a_0(y), a_1(y), \cdots, a_n(y)$ 互素, 则称 $f(x, y)$ 是一个关于 x 的本原多项式, 简称本原多项式.

本原多项式 $d(x, y)$ 称为 $f_1(x, y), f_2(x, y), \cdots, f_s(x, y)$ 的本原最大公因式, 若 $d(x, y)$ 是 $f_1(x, y), f_2(x, y), \cdots, f_s(x, y)$ 的公因式, 并且 $f_1(x, y), f_2(x, y), \cdots, f_s(x, y)$ 的任一本原公因式整除 $d(x, y)$.

设 $f(x, y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \cdots + a_n(y)$, 则 $\phi(y) | f(x, y) \Leftrightarrow \phi(y) | a_i(y), i = 0, 1, \cdots, n$.

设 $p(y)$ 是 $F[y]$ 中一个不可约多项式. 若 $p(y) | f(x, y)g(x, y)$, 则 $p(y) | f(x, y)$ 或 $p(y) | g(x, y)$.

设 $f(x, y)$ 是一个本原多项式. 若 $f(x, y) | \phi(y)g(x, y)$, 其中 $\phi(y) \neq 0$, 则 $f(x, y) | g(x, y)$.

$F[x, y]$ 中任意 s 个多项式 $f_1(x, y), f_2(x, y), \cdots, f_s(x, y)$ 一定有最大公因式.

若 $f_1(x, y), f_2(x, y), \cdots, f_s(x, y)$ 互素, 则有 $\phi(y) \neq 0$, 及 $\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y), \cdots, \lambda_s(x, y)$ 使得 $\phi(y) = \lambda_1(x, y)f_1(x, y) + \lambda_2(x, y)f_2(x, y) + \cdots + \lambda_s(x, y)f_s(x, y)$.

不可约多项式的基本性质:

1) 若 $p(x, y)$ 是不可约多项式, 则对于 F 中任意 $c \neq 0$, $cp(x, y)$ 也是不可约多项式;

2) 若 $p(x, y)$ 是不可约多项式, 则对于任意 $f(x, y) \in F[x, y]$, 或者 $p(x, y)$ 与 $f(x, y)$ 互素, 或者 $p(x, y)$ 整除

$f(x, y)$;

3) 若 $p(x, y)$ 是不可约多项式, $p(x, y) \mid f(x, y) \cdot g(x, y)$, 则或者 $p(x, y) \mid f(x, y)$, 或者 $p(x, y) \mid g(x, y)$;

4) 若 $p(x, y)$ 是不可约多项式, $p(x, y) \mid f_1(x, y) \cdots f_s(x, y)$, 则 $p(x, y)$ 至少整除 $f_1(x, y), \cdots, f_s(x, y)$ 之一.

$F[x, y]$ 中每一个次数 > 0 的多项式 $f(x, y)$ 都可以唯一地分解为 $F[x, y]$ 中有限个不可约多项式的乘积. 所谓唯一性是说, 若有 $f(x, y)$ 的两个分解式 $f(x, y) = p_1(x, y)p_2(x, y) \cdots p_s(x, y) = q_1(x, y)q_2(x, y) \cdots q_t(x, y)$, 其中 $p_i(x, y), q_j(x, y) (i=1, 2, \cdots, s, j=1, 2, \cdots, t)$ 均为 $F[x, y]$ 中的不可约多项式, 则必有 $s=t$, 并且, 适当调换因式的次序后, 有 $p_i(x, y) = c_i q_i(x, y), c_i \neq 0, c_i \in F, i=1, 2, \cdots, s$.

多项式互素的性质:

1) 若 $f(x, y), g(x, y)$ 都与 $h(x, y)$ 互素, 则 $f(x, y)g(x, y)$ 也与 $h(x, y)$ 互素;

2) 若 $h(x, y)$ 整除 $f(x, y)g(x, y)$, 而 $h(x, y)$ 与 $f(x, y)$ 互素, 则 $h(x, y)$ 一定整除 $g(x, y)$;

3) 若 $g(x, y), h(x, y)$ 都整除 $f(x, y)$, 而 $g(x, y)$ 与 $h(x, y)$ 互素, 则 $g(x, y)h(x, y)$ 也整除 $f(x, y)$.

对于 $n (n > 2)$ 元多项式, 可以类似地讨论.

V 历史资料点滴

一 求根公式的历史

根据古埃及的文字记载, 早在公元前1700年左右, 人们就发现, 当 $a \neq 0$ 时, $ax=b$ 有根 $x=b/a$. 到公元前几世纪, 巴比伦 (现在伊拉克的一部分) 人实际上已经使用配方法得到 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 的根 $x=(-b \pm \sqrt{b^2-4ac})/2a$. 当时, 人们只承

认正根。

公元九世纪的阿拉伯数学家花拉子模著有《还原与对消的科学》一书，论述了用还原与对消（相当于移项、合并同类项）的方法解方程，该书的拉丁文译名“al-jabr”演变为现在的英文的“代数学”一词。可见方程是代数学的中心议题。

关于三、四次方程的求根公式，直到十五世纪还有不少人认为，高于二次的方程是不可解的。正是由于这种原因，十六世纪中最有才能的数学家都着力寻找三、四次方程的解法，包括求近似根的方法。直到欧洲文艺复兴时期，才由意大利数学家费尔洛、塔尔塔里亚、卡丹、费拉里解决。

三次方程的求根公式称为卡丹公式，这是因为该公式首次出现于卡丹于1545年出版的书《大术》里。寻找该公式有相当的难度，经历时间长，再由于当时数学界互相保密及公开挑战，从而围绕该公式有许多美妙动听的故事，为不少数学史著作增加了篇幅。

三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根是：
$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}, \quad x_2 = \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}},$$
$$x_3 = \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}},$$
其中 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 为三次单位根，
$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

在三次方程的求解问题解决后不久，卡丹的仆人（后成为其学生、朋友）费拉里就得到了四次方程的解法。

四次方程 $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 的四个根与下列两个方程的根相同：

$$x^2 + (b + \sqrt{8y + b^2 - 4c})\frac{x}{2} + \left(y + \frac{6y - d}{\sqrt{8y + b^2 - 4c}} \right) = 0,$$

$$x^2 + (b - \sqrt{8y + b^2 - 4c})\frac{x}{2} + \left(y - \frac{6y - d}{\sqrt{8y + b^2 - 4c}} \right) = 0,$$

其中 y 是 $8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)y + e(4c - b^2) - d^2 = 0$ 的任一个根。

费拉里的成功，使得数学家们以极大的兴趣和自信致力于寻找五次方程的求根公式，从而，使得第一流的数学家们为之付出了近三个世纪之久的心血，终未成功。最后由阿贝尔给出了否定的解答。

我国秦、汉期间成书的《九章算术》已能解一般的一、二次方程。公元五世纪时，祖冲之就会解某些三次方程，宋朝的贾宪、杨辉已会用增乘开方法来求一般三次方程甚至四次方程的近似根，之后，秦九韶用正负开方术求高次方程的近似根。所有这些，在世界数学史上都占有重要地位。

二 阿贝尔与伽罗华

1824年，22岁的挪威数学家阿贝尔证明了高于四次的一般方程式没有求根公式，后来，他着手考虑一些特殊方程，称为阿贝尔方程，可以用求根公式求解。为此他最先引进了两个概念（虽然当时没有术语），即域和在给定域中不可约的多项式。阿贝尔然后着手探讨能用求根公式求解的全部方程的特性，可惜仅得出一些结果，于27岁逝世。

法国数学家伽罗华于19岁时彻底解决了阿贝尔未竟的问题，给出了方程可以用求根公式求解的必要充分条件。伽罗华引进了群的概念（虽然当时没有术语），建立了伽罗华理论，开创了代数学的新时代。伽罗华于21岁逝世。由于伽罗华的思想深刻，使得当时的数学大师也无法理解，所以在他死后38年，其理论才在《置换和代数方程专论》一书中得以全面阐述，此书为约当所著。

三 复数简史

历史证明，人类要接受一种新数，往往是非常困难的。第一个发现无理数的古希腊人希帕斯就被毕达哥拉斯学派的忠实信徒们抛进大海喂了鲨鱼。直到十九世纪，欧洲有些数学家还说负数“十分荒唐”，主张把它“从代数里驱逐出去”！

正当欧洲的数学家们被无理数和负数弄得晕头转向还没有完全清醒过来的时候，他们又遇到了一种更为奇怪的数 $\sqrt{-1}$ 。最早遇到这种数的人，是法国的舒开。第一个认真讨论这种数的人，是意大利的卡丹，他早在1545年研究三次方程的解法时，就把40作为 $5 + \sqrt{-15}$ 与 $5 - \sqrt{-15}$ 的乘积。然而这只不过是一种纯粹形式的表示而已。所以，那时许多人根本不承认负数开平方后还是“数”。十七世纪的法国大数学家笛卡尔也说，负数开平方是“不可思议的”，因而把这样的“数”称为“虚数”。这个名词就一直沿用到现在。直到十八世纪中叶以前，除了牛顿等个别数学家有时提到虚数之外，关于虚数的理论很少发展，人们一直把它看成是无实际意义的东西而加以抵制。

1747年法国著名数学家达朗贝尔对复数的研究推进了一大步。他指出，若按照多项式的四则运算规则对虚数进行计算，则结果总是 $a + b\sqrt{-1}$ 的形式（ a, b 都是实数）。这实际上提出了复数的概念。但是，“复数”这个名词是在十九世纪由德国数学家高斯给出的。

关于复数理论最系统的叙述，是由瑞士数学家欧拉给出的。他在1777年系统地建立了复数的理论，发现了复指数函数和三角函数间的关系，创立了复变函数论的一些基本定理，并且开始把它们用到水力学和地图学上。用符号“ i ”作为虚数的单位，也是他首创的。此后，复数才被人们广泛承认和使用。从虚数的出现到正式被人们承认，中间经历了两个多世纪。

在欧拉之后，挪威的一位测量学家外塞尔在前人工作的基础上，正式提出复数 $a + bi$ 用平面上的点（ a, b ）来表示，从而形

成了复平面的概念。

十九世纪，经柯西、黎曼、魏尔斯特拉斯的努力，复变函数形成了系统的理论，并且渗入到代数学、数论、微分方程等数学分支，同时在流体力学、热力学等方面也有了应用。

二十世纪以来，复变函数论进一步深入到工程部门中去，例如，儒可夫斯基以复变函数作为基本工具，创造了机翼理论。同时，复变函数论也越来越多地应用到理论物理、弹性理论、天体力学等方面。现在，复数和复变函数的理论，已成为科学家和技术人员普遍熟悉的数学工具。虚数之“虚”只剩下历史上的含义了。

四 代数基本定理的历史

若谈到方程的实际解法，则大量事实证明，用求根公式解方程的方法对一切代数方程而言，是远远不够的，除了二次方程之外，即使有求根公式，但由于公式的复杂性也难于奏效。

因此，数学家们对代数方程理论的研究，很早就着手在其它三个方面进行工作。即：1) 关于根的存在问题；2) 在解不出方程的情况下，按照它的系数去探索它的根的一些性质，例如，是否有实根的问题及根的个数的问题；3) 关于根的近似计算问题。

显然，首先要证明的是：每一个实系数或复系数 n ($n > 0$) 次代数方程总是至少有一个实根或复根，这就是所谓代数基本定理，它是数学中最重要的定理之一。数学家认识到这个定理是很早的事情了，时间可以上演到1608年的罗特，以后是1692年的基拉德。1742年12月15日欧拉在一封信中明确地陈述了这个定理。

但是，很久没有人给出该定理的严格证明。正是由于它的证明的困难以及具有基本性质，所以才被称之为“代数基本定理”。就实质而言，证明该定理的大部分方法，与其说是代数的，不如说是无穷小分析的。该定理的第一个证明是达朗贝尔在1746年给出的，但他的证明在后来发现有一点是不充分的。后来，欧拉于

1749年, 拉格朗日于1772年, 都试证过该定理. 历史上, 该定理的第一个严格证明通常认为是高斯给出的, 然而, 实际上, 高斯的证明也需要作补充, 而且并不少于达朗贝尔.

高斯非常重视该定理, 曾经给出四个严格证明, 第一个是在1797年(时年仅20岁), 这是他的博士论文(1799年发表). 第四个发表于1850年, 和第一个相隔整整半个世纪. “代数基本定理”这一名称看来也是他提出来的.

§6 基本习题

1. 试确定 a, b , 使 $x^2 - 2x + 4$ 能整除 $x^4 + 3x^2 + ax + b$.
2. 设 $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$, $g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$, 试求 $u(x), v(x)$, 使 $f(x)u(x) + g(x)v(x) = (f(x), g(x))$.
3. 判断多项式 $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 - 4x - 3$ 有无重因式, 若有, 试求出重因式及其重数.
4. 设 $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2$ 有一个根是 $1+i$, 试求 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中的标准分解式.
5. 试把 n 元对称多项式 $f = x_1^4 + \cdots + x_n^4$ 初等化.
6. 证明: $x \mid f^k(x) \Leftrightarrow x \mid f(x)$, 其中 k 是正整数.
7. 证明: $(f(x), g(x)) = 1 \Rightarrow (f^2(x), g^3(x)) = 1$.
8. 证明: 若 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 是整系数多项式且 $bd + cd$ 是奇数, 则 $f(x)$ 在 \mathbb{Q} 上不可约.
9. 证明: 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $\deg(f(x)) = n \geq 1$, 则 $f'(x) \mid f(x) \Leftrightarrow f(x) = a(x-b)^n$, $a, b \in \mathbb{F}$.
10. 设 a, b, c 是实数, 证明 a, b, c 都是正数的必要充分条件是 $a+b+c > 0$, $ab+bc+ca > 0$, $abc > 0$.

第二章 行列式

§1 概括说明

行列式的理论起源于解二元线性（一次）方程组及更多元的线性方程组。行列式是代数学中的一个基本概念，它不仅是求解线性方程组的有力工具，而且在代数学的其它部分也常用到。同时，也常用于数学的其它学科以及其它的科学技术领域。

本章的内容分为六个部分：行列式的定义，行列式的性质，行列式按行（列）展开，行列式的乘法，行列式的计算，克兰姆规则。

定义行列式可以采用几种不同的方法，我们采用以排列为工具作定义的方法。先由解线性方程组引入二阶、三阶行列式，而后研究排列的有关问题，最后给出行列式的定义。

行列式的性质首先是行与列的对称性，从而，对行成立的性质对列均成立。另外的性质分为两类：基本的性质和派生的性质。前者是由定义直接推出的，后者则是由已证明的性质而推出的。

行列式按行（列）展开，是行列式的更为深刻的性质。其中，按一行（列）展开的结论将用于建立克兰姆规则，而按若干行（列）展开的结论将用于建立行列式的乘法规则。

行列式的乘法规则具有重要的理论意义，在以后研究矩阵乘积的秩时将用到。

行列式的计算是本章的主要内容，甚至可以说是本章的核心。我们要综述各种常见的计算方法与技巧，同时，还要讲述机械计算法。行列式的计算是十分困难且十分复杂的，但是基本思想是清楚的，方向也是明确的。计算行列式的基本思想就是化

零，即，运用行列式的性质，特别是运用倍加不变性，把行列式的元素化成更多的零。当然不是乱化零，而是按一定的方向去做，化成三角形或者化成某一行（列）中除一个元素外其余元素均为零，即所谓的化三角形法和降阶法。

克兰姆规则是行列式理论的一个直接应用。

本章的补充资料是：行列式的其它定义方法，历史资料点滴。

§2 内容提要

I 行列式的定义

一 二阶与三阶行列式

研究二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

用加减消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，就得到

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

为了书写方便，引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

从而，类似地就有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

于是，就简单地记为 $x_1 = D_1/D$, $x_2 = D_2/D$ 。

上面的这种通过一定的规则计算出来的并且用特定的符号

(记号)表示的数 D 、 D_1 、 D_2 , 称为二阶行列式.

同样地, 研究三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases},$$

就引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

分析二阶行列式与三阶行列式, 得到下列三条规律:

- 1) 项数: 二阶行列式有 $2!$ 项, 三阶行列式有 $3!$ 项;
- 2) 项的结构: 由行列式中不同行不同列的元素的乘积而成;
- 3) 项的符号: 在总项数中有一半项取正号, 另一半项取负号, 正负号由元素所在的行数与列数决定.

我们将由此进行推广, 引进 n 阶行列式.

二 排列

n 个数码 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序组称为一个 n 级排列, 记为 $j_1j_2\cdots j_n, i_1i_2\cdots i_n$ 等. n 级排列的总数是 $n!$.

在一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中, 若一对数码的前后位置与其大小顺序相反, 即前面的数大于后面的数, 则称它们构成排列的一个逆序(反序). 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数. 排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数, 记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

排列 $12\cdots n$ 中没有逆序, 称 $12\cdots n$ 为自然顺序排列.

求排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数的方法如下: 从1开始, 求出 $\tau(1)$, $\tau(1)$ 是1的前面的数码的个数, 去掉1; 求出 $\tau(2)$, $\tau(2)$ 是2的前面的数码的个数, 去掉2; \dots ; 直至 n , 从而, $\tau(j_1j_2\cdots j_n) = \tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n)$. 或者, 类似地: 从 n 开始, 求出 $\tau'(n)$, $\tau'(n)$ 表示 n 的后面的数码的个数, 去掉 n ;

..., 从而, $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = \tau'(n) + \tau'(n-1) + \cdots + \tau'(2) + \tau'(1)$.

在一个排列中, 交换两个数码 i 与 j 的位置, 而其余的数码不动, 就得到另一个排列, 这种对排列所作的变换手续称为对换, 记作 (i, j) . 任意排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 都可以经过一系列对换而变为另一个排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$. 任一个对换把全部 $n(n \geq 2)$ 级排列两两配对, 使得两个配成对的排列在该对换下互变. 逆序数为偶数的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列. 对换改变排列的奇偶性. 当 $n \geq 2$ 时, $n!$ 个 n 级排列中奇、偶排列各占一半, 即各有 $n!/2$ 个.

任意一个 n 级排列与排列 $12 \cdots n$ 都可以经过一系列对换互变, 并且, 所作对换的个数的奇偶性与该排列的奇偶性相同.

三 n 阶行列式的定义

数域 F 上的 n^2 个数写为如下的形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

表示 F 中的一个数, 称为数域 F 上的一个 n 阶行列式: 它是 $n!$ 项的代数和, 每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 该项的符号是 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对一切 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和.

符号定理: 若 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是两个 n 级排列, 则

$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 是 n 阶行列式的一项，且该项的符号是

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}.$$

n 阶行列式也可以定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

n 阶行列式的两种定义彼此等价。

I 行列式的性质

一 行与列的对称性

若把行列式 D 的行相应地写为列，得到一个新的行列式 D' ，则称 D' 是 D 的转置行列式。行列式 D 与其转置行列式 D' 相等， $D = D'$ 。换言之，行列互变，行列式不变。于是，行列式的行与列处于完全平等的地位，对行成立的性质，对列同样地成立。下面，为了叙述的方便，我们仅对行进行讨论。

二 基本的性质

行列式 D 的某一行的公因子 k 可以提到行列式 D 的外边（单行因子可提性）。

若行列式 D 的第 i 行各元素都是两项之和，则行列式 D 可以拆成两个行列式 D_1 与 D_2 之和，其中 D_1 除第 i 行是 D 的第 i 行的第 1 项外，其余诸行与 D 相同， D_2 除第 i 行是 D 的第 i 行的第 2 项外，其余诸行与 D 相同。对于第 i 行的各元素都是 s 项之和的情况，则等于 s 个行列式之和（单行可加性）。

若行列式有两行元素相同，则该行列式为零。

三 派生的性质

若行列式有两行成比例，则该行列式为零。

一行的倍数加到另一行，行列式不变（倍加不变性）。

对换行列式两行的位置，行列式反号。

II 行列式展开定理

一 总论

行列式的展开定理揭示了行列式的更深刻的性质，给出了计算行列式过程中高阶向低阶转化的可能性及其依据。

二 子式、余子式、代数余子式

在一个 n 阶行列式 D 中，任意选定 k 行、 k 列 ($1 \leq k \leq n$)，设为第 i_1, i_2, \dots, i_k 行，第 j_1, j_2, \dots, j_k 列 ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$)，位于这些行和列的交点处的 k^2 个元素按照原来的位置组成一个 k 阶行列式，称为行列式 D 的 k 阶子式，记为 $M \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ ，或简记为 M 。而 D 中划

去这 k 行、 k 列 ($1 \leq k \leq n-1$) 后余下的 $(n-k)^2$ 个元素按照原来的位置组成一个 $n-k$ 阶行列式，称为 k 阶子式 M 的余子式，记为 $\overline{M} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ ，或简记为 \overline{M} 。

n 阶行列式 D 的 k 阶子式共有 $(C_n^k)^2$ 个。

设 $M \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ 是行列式 D 的 k 阶子式， \overline{M} 是它的余子

式，则称 $(-1)^{(i_1+i_2+\dots+i_k)+(j_1+j_2+\dots+j_k)} \overline{M}$

为 $M \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ 的代数余子式，记为 $\Lambda \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ ，即

$$\Lambda \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} = (-1)^{(i_1+i_2+\dots+i_k)+(j_1+j_2+\dots+j_k)} \overline{M}.$$

特别地，当 $k=1$ 时，行列式 D 的一阶子式就是由一个元素组成的一阶行列式 $|a_{ij}|=a_{ij}$ ，而 a_{ij} 的余子式为 $n-1$ 阶行列式，记为 M_{ij} ，它的代数余子式记为 Λ_{ij} ，即 $\Lambda_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$ 。

三 行列式按一行(列)展开

行列式任意一行（列）的元素与它们的代数余子式乘积的和等于行列式的值，而任意一行（列）的元素与另一行（列）的元素的代数余子式乘积的和等于零。即

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} A_{ik} = \begin{cases} D(i=j); \\ 0 (i \neq j). \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

或
$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} D(i=j); \\ 0 (i \neq j). \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

四 行列式按若干行（列）展开

拉普拉斯展开定理。设在 $n(n \geq 2)$ 阶行列式 D 中任意取定了 k 行（列）， $1 \leq k \leq n-1$ 。由这 k 行（列）元素组成的所有 k 阶子式与它们对应的代数余子式乘积的和等于行列式 D 。即

$$D = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} M \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix},$$

或
$$D = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} M \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}.$$

IV 行列式的乘法

设有两个 n 阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则
$$D_1 D_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}, \quad \text{其中 } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$ 。即所谓“行乘列”法则。类似地，还有“行乘行”、“列乘行”、“列乘列”法则。共四种乘法规则。

V 行列式的计算

一 总论

行列式的计算，其基本思想与步骤是：

1) 根据所给行列式的特点，用行列式的性质把行列式化为一些特定型式（特殊行列式、已知行列式）或较简单的型式（如一些行或列中出现较多的零）；

2) 按特定型式的行列式计算出值来，特别地，常常考虑化为三角形行列式，即所谓化三角形法；或者，选择含零最多的行（列）进行展开，化为较低阶的行列式，特别地，常常考虑把某一行（列）化为除一个元素外其余全是零，即所谓降阶法。

大多数情况下，要交替使用 1) 与 2)，从而使行列式逐次简化逐次降阶，最后求出行列式的值来。

二 特殊行列式

$$\text{设有行列式 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 组成 D 的主对角线， $a_{1n}, a_{2, n-1}, \cdots, a_{n-1, 2}, a_{n1}$ 组成 D 的副对角线。

上(下)三角形行列式：主对角线以下(上)元素全为 0。对角形行列式：主对角线之外的元素全为 0。它们的值都等于其主对角线元素之积。

范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \\ (a_3 - a_2) \cdots (a_n - a_2) \\ \cdots \cdots \cdots \\ (a_n - a_{n-1})$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

三 机械算法

设有 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

不妨设 $a_{11} \neq 0$ ，否则，可通过交换行或列，而使 a_{11} 位置的元素不为零，且采用在一行（列）的元素前面添负号的办法，使行列式的值不变。分别将第 1 行的 $-a_{i1}/a_{11}$ 倍加于第 i 行 ($i=2, \dots, n$)，则使第 1 列的 a_{11} 之外的元素全为零，从而有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}.$$

对于 a'_{22} ，用同样的方法，使第 2 列的 a'_{22} 之下的元素全变为零，即，假定 $a'_{22} \neq 0$ ，第 2 行的 $-a'_{i2}/a'_{22}$ 倍加于第 i 行 ($i=3, \dots, n$)。

如此下去，至第 $n-1$ 行，得到

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

定理。任一个 n 阶行列式都可以化为一个等值的三角形行列式，且所进行的乘法（除法）的次数不超过 $(n^3 + 2n - 3)/3$ 就计算出该行列式。

四 常用计算方法

递推法：先求出行列式与其类型相同的低阶行列式之间的递推关系，然后，利用该递推关系来计算行列式。

拆项法：将一行列式拆成若干个行列式的和.

归纳法：通过计算 2 阶、3 阶，找到规律，再用数学归纳法证明。

VI 克兰姆规则

[illegible]

时, 有唯一解 $x_j = D_j/D$, $j = 1, 2, \dots, n$, 其中

对于齐次线性方程组

[illegible]

§3 重点难点

本章的基本方法是：排列逆序算法， n 阶行列式定义算法，行列式降阶算法，行列式化三角形算法，行列式常用计算方法（全1行（列）法、递推法、加边法、拆项法、提因子法、归纳法），线性方程组克兰姆规则解法。

行列式的性质是行列式理论的基础和主要部分，是计算行列式的依据，也是应用行列式解决其它问题的依据，从而，成为本

章的一个重点。行列式的性质包括：行与列的对称性，基本的性质，派生的性质，展开定理。其中，行列式的展开定理是更深刻、更重要的性质。

行列式作为一种工具应用于数学某些分支及其它科学技术部门，相当多的情况下是计算行列式，所以，行列式的计算是本章的核心问题。同时，通过行列式的计算，反过来进一步认识行列式性质的重要性，并且，进一步深刻理解行列式性质的实质。因此，行列式的计算成为本章的一个重点。行列式的计算是一项技巧性很强的工作，虽然有某些较为一般的方法供参考和使用，但是，具体问题具体分析仍是关键所在。

克兰姆规则是行列式理论的一个直接应用。行列式起源于解线性方程组，换言之，起源于推广二元线性方程组的克兰姆规则到 n 元的情况；并且，没有行列式的一整套理论，要证明克兰姆规则是不可能的；所以，就一定意义而言，行列式理论的发生及归宿就是克兰姆规则。此外，克兰姆规则自身也具有重要的理论与实践意义。因此，克兰姆规则成为本章的一个重点。

本章的难点是：行列式的定义，行列式的展开定理，行列式的计算。

n 阶行列式的定义是抽象的，由于 n 是一般的自然数，所以，行列式的记号、项、排列等都采用了省略号的写法，这在形式上就不大习惯；而且，又要以排列及排列的逆序数作为基础， $n!$ 个项与排列紧密相关，从而，比较难以理解其实质。因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1）写出并分析二阶行列式、三阶行列式的所有项，从而总结出基本规律，为 n 阶行列式的定义打好实际基础；2）强调行列式的本质就是用特定符号表示的一个数，该数是 $n!$ 项的代数和，这个代数和中的每一项不仅与构成行列式的 n^2 个数有关，也与这些数的排列位置有关；3）通过计算某些特殊行列式（例如三角形行列式），加深对于项的

取法及确定项的符号等的理解。

行列式的展开定理是行列式的更深刻的性质。建立展开定理要用到子式、余子式、代数余子式的概念；证明展开定理要用到行列式的定义及已有的性质，并有一定的技巧；所以，综合性较强。因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1）先用三阶行列式展为二阶行列式的例子，熟悉展开定理；2）正确理解代数余子式的概念；3）将证明分为几种情况，由特殊到一般，完成证明。

行列式的计算，既是本章的一个重点，又是本章的一个难点。行列式各种各样，没有一般的计算方法，所以，计算行列式是技巧性很强的工作。因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1）明确基本思想是化零，方向是化三角形法和降阶法；2）计算之前要认真地观察行列式的特点，一般地，着重观察行的特点、列的特点、对角线的特点，然后根据其特点作化零试验；3）熟悉一些较基本的方法及典型例子，从而开阔思路；4）多做题目并注意总结，从而不断提高分析能力与应变能力。

§4 习题类解

I 计算题

一 排列的逆序数及奇偶性

掌握排列的逆序数的计算方法及排列奇偶性的定义，就可以解决此类问题。

例 1 选择 i 与 k ，使 $1274i56k9$ 成偶排列。

解 显然 i 与 k 只能选择 3 与 8。设 $i=3$ ， $k=8$ ，则得排列 127435689 。计算得出，此排列的逆序数是 5，是奇排列。但是，由于对换改变排列的奇偶性，所以，取 $i=8$ ， $k=3$ ，就得到 127485639 是偶排列。

例 2 计算 $2n$ 级排列 $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$ 的逆序数，并

确定其奇偶性。

分析 给定的排列中，前 n 个数码 $1, 3, 5, \dots, (2n-1)$ 之间不构成逆序，后 n 个数码 $2, 4, \dots, (2n)$ 之间也不构成逆序，只有前 n 个数码与后 n 个数码之间才构成逆序。

$$\begin{aligned} & \text{解 } \tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)) \\ &= \tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \tau(4) + \cdots + \tau(2n-3) + \tau(2n-2) + \\ & \quad \tau(2n-1) + \tau(2n) \\ &= 0 + (n-1) + 0 + (n-2) + \cdots + 0 + 1 + 0 + 0 = n(n-1)/2. \end{aligned}$$

当 $n=4k, 4k+1$ 时为偶排列；当 $n=4k+2, 4k+3$ 时为奇排列。

二 确定行列式的项及项的符号

根据行列式的定义，可以确定行列式的具有某些性质的项，也可以确定项的符号。

例3 写出四阶行列式中所有带负号且包含 a_{23} 的项。

解 这样的项可以设为 $a_{1i}a_{23}a_{3j}a_{4k}$ 。要使其带负号，当且仅当其列标所构成的排列 $i3jk$ 为奇排列。而 i, j, k 只能取 $1, 2, 4$ 中的数，例如取 $i=1, j=2, k=4$ ，则得 1324 ，它是一个奇排列。由于对换改变排列的奇偶性，所以可得 $4312, 2341$ （ 3 在第二个位置不动）也是奇排列。而且，再也没有满足条件的别的奇排列（ 3 在第二个位置的排列共 6 个），因此，所求的项是： $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}, a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}, a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ 。

例4 下列各乘积是否是4阶行列式中的项？若是，试确定应取的符号：

$$1) a_{11}a_{23}a_{14}a_{42}; \quad 2) a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}.$$

分析 根据 n 阶行列式的定义，每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积，所以，若发现 n 个元素的乘积中有两个元素取自同一行或同一列，则可以断定该乘积不是 n 阶行列式的项，而要断定乘积中是否有同行或同列元素，只要看这 n 个元素中是否有

相同的行标或相同的列标。

解 1) 因为, $a_{11}a_{23}a_{14}a_{42}$ 中元素 a_{11} 与 a_{14} 均为第一行的元素, 所以, $a_{11}a_{23}a_{14}a_{42}$ 不是 4 阶行列式中的项。

2) 因为, $a_{34}a_{12}a_{42}a_{21}$ 中元素的行标互不相同, 列标也互不相同, 所以, $a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$ 是 4 阶行列式的项。又, $a_{34}a_{12}a_{43}a_{21} = a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$, 而 $\tau(2143) = 2$, 所以 $a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$ 应取正号。

例 5 选择 i 与 k , 使 $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ 成为 5 阶行列式中一个带负号的项。

解 由于 $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53} = a_{1i}a_{25}a_{32}a_{4k}a_{53}$, 所以, 只须使 $i52k3$ 成为一个 5 级奇排列。若取 $i=1, k=4$, 则所得排列 15243 的逆序数为 4, 是偶排列, 该项应带正号。因为对换改变排列的奇偶性, 所以, 取 $i=4, k=1$ 时, 则该项带负号。

三 行列式的计算

关于行列式的计算, 分为五个部分: 利用定义, 机械算法, 利用特殊行列式, 降阶, 常用算法举例。当然, 这五部分在逻辑上并不是并列关系, 仅仅是为了叙述方便才这样划分为五部分。

1 利用定义

有的行列式利用定义直接计算反而简单。

$$\text{例 6 计算行列式 } D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 D 的一般项可表示为 $a_i b_j c_k d_s e_t$, 其中 $ijkst$ 是任意一个 5 级排列, 而且 $c_r, d_r, e_r, (r=3, 4, 5)$ 都是 0。由于 k, s, t 是 1, 2, 3, 4, 5 中的三个不同的数, 所以, 至少

要取到 3, 4, 5 中的一个数, 从而, 在 D 的展开式的每个项中至少有一个因子是 0, 因此, D 的每一项都是 0, $D=0$.

说明 显然, 本例可直接用拉普拉斯定理.

例 7 求行列式 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数.

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

解 根据行列式定义, 只有主对角线上的元素相乘才会出现 x^4 , 且该项带正号, 所以, $f(x)$ 中 x^4 的系数是 2.

同样, 含 x^3 的项也只有 $x \cdot 1 \cdot x \cdot x$, 该项的列标构成排列 2134, 而 $\tau(2134)=1$, 所以, $f(x)$ 的含 x^3 的项是 $-x^3$, 其系数是 -1.

2 机械算法

根据 § 2, V, 三, 所述的机械算法的程序, 对数字元素的行列式进行变形, 化为三角形行列式, 而后求出值.

例 8 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$

$$\begin{aligned} \text{解 } D &= \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot (-13) \cdot 16 \cdot (3/2) = 312. \end{aligned}$$

3 利用特殊行列式

对于所要计算的行列式, 直接利用已知的行列式, 或者经过简单的变化之后, 再利用已知的行列式.

例9 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D &= x \begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix} \\ &= x^n + (-1)^{n+1} y^n. \end{aligned}$$

例10 计算 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \sin^n \alpha_1 & \sin^{n-1} \alpha_1 \cos \alpha_1 & \cdots & \sin \alpha_1 \cos^{n-1} \alpha_1 & \cos^n \alpha_1 \\ \sin^n \alpha_2 & \sin^{n-1} \alpha_2 \cos \alpha_2 & \cdots & \sin \alpha_2 \cos^{n-1} \alpha_2 & \cos^n \alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin^n \alpha_{n+1} & \sin^{n-1} \alpha_{n+1} \cos \alpha_{n+1} & \cdots & \sin \alpha_{n+1} \cos^{n-1} \alpha_{n+1} & \cos^n \alpha_{n+1} \end{vmatrix}$$

其中 $\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cdots \sin \alpha_{n+1} \neq 0$.

$$\text{解 } D = (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cdots \sin \alpha_{n+1})^n.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin^{-1} \alpha_1 \cos \alpha_1 & \cdots & \sin^{-(n-1)} \alpha_1 \cos^{n-1} \alpha_1 & \sin^{-n} \alpha_1 \cos^n \alpha_1 \\ 1 & \sin^{-1} \alpha_2 \cos \alpha_2 & \cdots & \sin^{-(n-1)} \alpha_2 \cos^{n-1} \alpha_2 & \sin^{-n} \alpha_2 \cos^n \alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \sin^{-1} \alpha_{n+1} \cos \alpha_{n+1} & \cdots & \sin^{-(n-1)} \alpha_{n+1} \cos^{n-1} \alpha_{n+1} & \sin^{-n} \alpha_{n+1} \cos^n \alpha_{n+1} \end{vmatrix} \\ = (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cdots \sin \alpha_{n+1})^n$$

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (\sin^{-1} \alpha_j \cos \alpha_j - \sin^{-1} \alpha_i \cos \alpha_i)$$

$$\begin{aligned}
&= (\sin \alpha_1 \cdots \sin \alpha_{n+1})^n \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \frac{\sin \alpha_i \cos \alpha_j - \cos \alpha_i \sin \alpha_j}{\sin \alpha_i \sin \alpha_j} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (\sin \alpha_i \cos \alpha_j - \cos \alpha_i \sin \alpha_j) \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \sin(\alpha_i - \alpha_j).
\end{aligned}$$

说明 若 $\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cdots \sin \alpha_{n+1} = 0$ ，采用其它方法进行计算，可得同样结果。

4 降阶

降阶是计算行列式的一个基本思想，这里的降阶，意思是：运用行列式的性质进行恒等变形，而后按一行（列）展开。进行恒等变形时，常用下列的方法。

方法 1 把某一行（列）的倍数加于其余各行（列）。

例11 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$ 。

解 由于行列式的主对角线上的元素依次是 1, 2, ..., n, 而其余的元素都是 2, 所以, 把第 2 行的 -1 倍加于其余各行, 而后再按第 1 行展开, 得到

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = (-2)((n-2)!)$$

方法 2 所有各行（列）加于某一行（列）。

例12 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

解 其余各行均加于最后一行，而后按最后一行展开，得到

$$D = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n+1 \end{vmatrix}$$

$$= (n+1) \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (n+1) a_1 a_2 \cdots a_n.$$

方法3 逐行(列)相加.

例13 计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$

解 第1列的 x 倍加于第2列，新的第2列的 x 倍加于第3

列，如此下去，得到 $D =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+x & 3+2x+x^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)x+\cdots+x^{n-2} & n+(n-1)x+\cdots+x^{n-1} \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

再按最后一列展开，得到

$$\begin{aligned} D &= (n+(n-1)x+\cdots+x^{n-1})(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+n}(-1)^{n-1}(n+(n-1)x+\cdots+x^{n-1}) \\ &= n+(n-1)x+\cdots+x^{n-1}. \end{aligned}$$

5 常用计算法举例

方法1 全1行(列)法

例14 计算 $n+1$ 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}.$

解 把各列都加到第1列，得

$$D = \left(x + \sum_{i=1}^n a_i \right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

第1列的 $(-a_1), (-a_2), \cdots, (-a_n)$ 倍分别加到第2列, 3列, $\cdots, n+1$ 列，得

$$D = \left(x + \sum_{i=1}^n a_i \right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(x + \sum_{i=1}^n a_i \right) \prod_{j=1}^n (x - a_j).$$

方法2 递推法

例15 计算n阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}.$

解 把 D_n 的最后1列改写为和式: $y+0, y+0, \cdots, y+0, y+(x-y)$, 而后写为两个行列式之和,

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & 0 \\ z & x & y & \cdots & y & 0 \\ z & z & x & \cdots & y & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x & 0 \\ z & z & z & \cdots & z & x-y \end{vmatrix}$$

$$= y \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & 1 \\ z & x & y & \cdots & y & 1 \\ & z & x & \cdots & y & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x & 1 \\ z & z & z & \cdots & z & 1 \end{vmatrix} + (x-y)D_{n-1}$$

$$= y \begin{vmatrix} x-z & y-z & y-z & \cdots & y-z & 1 \\ 0 & x-z & y-z & \cdots & y-z & 1 \\ 0 & 0 & x-z & \cdots & y-z & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} + (x-y)D_{n-1}$$

$$=(x-y)D_{n-1}+y(x-z)^{n-1}$$

把 D_n 的转置行列式按上述步骤计算, 得

$$D_n=(x-z)D_{n-1}+z(x-y)^{n-1}$$

当 $y \neq z$ 时, 由上两个递推关系式求得

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{z(x-y)^{n-1}(x-y)-y(x-z)^{n-1}(x-z)}{(x-y)-(x-z)} \\ &= \frac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}; \end{aligned}$$

当 $y=z$ 时, 仿照例14, 可以求得

$$D_n=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}.$$

说明 递推关系式大体上可以分为三种情况: 1) $D_n = \alpha D_{n-1} + \beta$, α, β 为常量. 此时, 由 D_1, D_2 的值, 预测 D_n 的表示式, 再用数学归纳法证明. 2) $D_n = aD_{n-1} + b, D_n = cD_{n-1} + d, a, b, c, d$ 为常量, $a \neq c$, 解得 $D_n = (ad - bc)/(a - c)$. 3) $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, n > 2$, 其中 p, q 不依赖于 n , 且 $q \neq 0$. 设 α, β 是 $x^2 - px - q = 0$ 的根, 则 $p = \alpha + \beta, q = \alpha\beta$. 以此代入递推式, 得 $D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$, 从而有

$$\begin{cases} D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) \\ D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2}) \end{cases},$$

$$\begin{cases} D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1) \\ D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2}(D_2 - \beta D_1) \end{cases}.$$

方法3 加边法

例16 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$.

解 将 D 添加一行一列, 并使其值不变,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ 0 & a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

将第 1 行的 -1 倍分别加到第 2, 3, ..., n+1 行, 得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

将这个 n+1 阶行列式再加边成 n+2 阶行列式, 并使其值不变,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & -1 & \cdots & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

将第 1 列的 -1 倍分别加到第 3, 4, ..., n+2 列, 得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

分别将第 3, 4, ..., n+2 列的 (1/2) 倍都加到第 1 列, 再将第 3, 4, ..., n+2 列分别乘以 $-(1/2a_1)$, $-(1/2a_2)$, ..., $-(1/2a_n)$ 都加到第 2 列, 得

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i & 1-\frac{n}{2} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix} \\
 &= (-2)^n a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i & 1-\frac{n}{2} \end{vmatrix} \\
 &= (-2)^{n-2} a_1 a_2 \cdots a_n \left[(2-n)^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{a_i} \right].
 \end{aligned}$$

说明 本例用了两次加边, 充分说明, 有时把行列式的阶数增高反而容易求出行列式的值.

方法4 拆项法

例17 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \quad (n>2).$$

解1 将 D 关于第1列拆成两个行列式之和, 再将这两个行列式按第2列拆成 $2^2=4$ 个行列式之和, 如此继续下去, 得到 2^n 个行列式, 这些行列式中, 每个行列式都至少有两列相同或两列成比例, 其值均为0, 因此, $D=0$.

$$\text{解2} \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

解3 第*i*列与第*j*列分别减去第1列, 得

$$D = \begin{vmatrix} \cdots & b_i - b_1 & \cdots & b_j - b_1 & \cdots \\ \cdots & b_i - b_1 & \cdots & b_j - b_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_i - b_1 & \cdots & b_j - b_1 & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

说明 1) 本例的三种解法中, 解1, 即拆项法, 最容易想到; 2) 例15中已用了拆项法, 而且那里的方法更常用到。

方法5 提因子法

例18 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}.$

解 首先, 将D的第2, 3, 4列都加到第1列上, 可以看出, D有因式 $x+y+z$; 其次, 将D的第2列加到第1列而后减去第3, 4列, 可以看出, D有因式 $y+z-x$; 再次, 将D的第3列加到第1列而后再减去第2, 4列, 可以看出, D有因式 $x-y+z$; 最后, 将D的第4列加到第1列后再减去第2, 3列, 可以看出, D有因式 $x+y-z$. 由多元多项式的理论知, D能被这四个因式的乘积整除. 但是, D中含有 z^4 的项, 且系数为1, 因此 $D = -(x+y+z)(y+z-x)(x-y+z)(x+y-z).$

例19 计算*n*阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}.$

解1 第1行的-1倍依次加到第2, 3, ..., *n*行, 得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-(n-1) \end{vmatrix}$$

$$=(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))$$

解 2 当 $x=1$ 时, D 的第 1, 2 列成比例, 值为 0, 从而 D 有因式 $x-1$. 同理, D 有因式 $x-2, x-3, \cdots, x-(n-1)$. 由于这 $n-1$ 个因式两两互素, 所以它们的积整除 D . 但是, D 的展开式中最高次项 x^{n-1} 的系数为 1, 因此,

$$D=(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))$$

说明 本例的解 2 是提因子法, 可以类似地解决一类这样的题目.

方法 6 归纳法

例 20 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 2\cos \alpha \end{vmatrix}$$

解 $D_1 = |\cos \alpha| = \cos \alpha,$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 \\ 1 & 2\cos \alpha \end{vmatrix} = 2\cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha.$$

下面用数学归纳法证明: $D_n = \cos n\alpha$.

设一切小于 n 的情况成立, 研究 D_n . 对于 D_n , 按最后一行展开, 得到

$$\begin{aligned} D_n &= 2\cos \alpha D_{n-1} - D_{n-2} \\ &= 2\cos \alpha \cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha = \cos n\alpha. \end{aligned}$$

四 用克兰姆规则解线性方程组

只能解 n 个未知量 n 个方程的线性方程组. 对于这样的方程组, 先计算系数行列式 D , 当 $D \neq 0$ 时, 再计算 D_j , 而后再求解; 当 $D = 0$ 时, 不适用.

例 21 用克兰姆规则解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 \quad \quad - 6x_4 = 9 \\ \quad \quad 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0.$$

再计算

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27.$$

根据克兰姆规则, 方程有唯一解: $x_1 = D_1/D = 3$, $x_2 = D_2/D = -4$, $x_3 = D_3/D = -1$, $x_4 = D_4/D = 1$.

I 证明题

一 有关排列的证明

这类证明题目主要考虑逆序数、对换、奇偶性.

例1 证明: $\tau(x_1 x_2 \cdots x_n) = \frac{1}{2} n(n-1) - \tau(x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1)$.

证明 因为, x_1, x_2, \cdots, x_n 中任意两个不同的 x_i 与 x_j 必定在排列 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 或 $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 中构成逆序, 而且只能在其中的一个构成逆序, 所以, 这两个排列逆序数的和等于 $c_n^2 =$

$n(n-1)/2$ 。因此结论成立。

例 2 证明：任意 n 元排列 $x_1 x_2 \cdots x_n$ ，一定可以经过不超过 n 次的对换变为 n 元排列 $12 \cdots n$ 。

证明 对 n 用数学归纳法。

当 $n=1$ 时，结论显然成立。假设对 $n-1$ 元排列结论成立，考虑 n 元排列 $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$ 。若 $x_n = n$ ，则 $x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$ 是 $1, 2, \cdots, n-1$ 的一个 $n-1$ 元排列，由归纳假设，经不多于 $n-1$ 次对换， $x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$ 变为 $12 \cdots (n-1)$ ，从而，经不多于 n 次（实际是不多于 $n-1$ 次）对换， $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$ 变为 $12 \cdots (n-1)n$ 。结论成立。若 $x_n \neq n$ ，设 $x_i = n$ ($i < n$)，则可先对 $x_1 \cdots x_i \cdots x_{n-1} x_n$ 进行对换 (x_i, x_n)，得到 $x_1 \cdots x_n \cdots x_{n-1} n$ ，化为已证的情况。结论也成立。根据数学归纳法原理，结论得证。

二 用行列式定义进行的证明

这类证明题目要通过行列式的定义来证明；甚至只能通过行列式的定义来证明，别无途径。

例 3 证明：若 n 阶行列式 D 中等于零的元素的个数多于 $n^2 - n$ ，则 $D = 0$ 。

证明 因为， D 共有 n^2 个元素，又， D 中等于零的元素的个数多于 $n^2 - n$ ，所以， D 中不等于零的元素的个数少于 $n^2 - (n^2 - n) = n$ 。根据行列式的定义，行列式的每一项为不同行不同列的 n 个元素的积，所以， D 的每一项中至少有一个因子为零，因此， $D = 0$ 。

例 4 设有两个行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $b \neq 0$ ，证明 $D_1 = D_2$ 。

证明 按照行列式的定义,

$$D_1 = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

$$D_2 = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} (a_{1j_1} b^{1-j_1}) (a_{2j_2} b^{2-j_2}) \cdots (a_{nj_n} b^{n-j_n}).$$

而 $(a_{1j_1} b^{1-j_1}) (a_{2j_2} b^{2-j_2}) \cdots (a_{nj_n} b^{n-j_n}) = a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} b^{(1+2+\cdots+n)-(j_1+j_2+\cdots+j_n)} = a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} b^0 = a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 所以, $D_1 = D_2$.

例 5 证明: 若三阶行列式 D 的所有元素均等于 ± 1 , 则 $|D| \leq 4$.

证明 首先, D 的展开式共有 6 项, 而每一项的绝对值均等于 1, 所以 $|D| \leq 6$. 其次, 由于 D 的一行加于另一行后, 得出一全为偶数的行, 所以 D 是偶数. 因此, 只要证明 $D \neq \pm 6$.

先证明 $D \neq 6$, 由于 3 阶行列式 D 的展开式共有六项:

$$a_{11}a_{22}a_{33}, a_{12}a_{23}a_{31}, a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$\text{和 } -a_{11}a_{23}a_{32}, -a_{12}a_{21}a_{33}, -a_{13}a_{22}a_{31},$$

所以, 若 $D = 6$, 则这六项全等于 1, 从而, 前三项的乘积与后三项的乘积均等于 1, 即

$$(a_{11}a_{22}a_{33}) \cdot (a_{12}a_{23}a_{31}) \cdot (a_{13}a_{21}a_{32}) = 1,$$

$$(-a_{11}a_{23}a_{32}) \cdot (-a_{12}a_{21}a_{33}) \cdot (-a_{13}a_{22}a_{31}) = 1,$$

引出矛盾. 因此, $D \neq 6$.

同样可证 $D \neq -6$, 故得 $|D| \leq 4$.

三 用行列式性质进行的证明

这类证明题目主要是行列式值的表达式. 一般要反复应用行列式的各种性质, 才能给出证明.

例 6 证明 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ \cdots & \cdots & a & b & \cdots \\ \cdots & \cdots & b & a & \cdots \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & b & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^n.$$

证明 1 根据拉普拉斯定理，对 D_{2n} 按第 1, $2n$ 行展开，得

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} D_{2(n-1)}.$$

再根据拉普拉斯定理，对 $D_{2(n-1)}$ 按第 1, $2(n-1)$ 行展开，得

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}^2 D_{2(n-1)}.$$

如此继续下去，便得

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}^n = (a^2 - b^2)^n.$$

证明 2 将 D_{2n} 的第 $2n$ 列加到第 1 列上，第 $2n-1$ 列加到第 2 列上， \cdots ，第 $n+1$ 列加到第 n 列上，而后分别从第 1, 2, \cdots , n 列中提出 $a+b$ ，得

$$D_{2n} = (a+b)^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & 1 & \cdots & b & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ \cdots & \cdots & 1 & b & \cdots \\ \cdots & \cdots & 1 & a & \cdots \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 1 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

将第 1, 2, ..., n 列都乘以 $-b$, 而后分别加到第 $2n, 2n-1, \dots, n+1$ 列上, 得

$$D_{2n} = (a+b)^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & a-b & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & a-b & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)^n (a-b)^n = (a^2 - b^2)^n.$$

说明 1) 本例也可以如下证明: 当 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 时, 从 D_{2n} 的前 n 行提 a , 后 n 行提 b ; 而后, 将第 1, 2, ..., n 列分别乘以 $(-b/a)$, 再分别加到第 $2n, 2n-1, \dots, n+1$ 列上. 当 $a=0$ 或 $b=0$ 时易证; 2) 本例说明, 同一个题目可以有多种证法; 3) 本例的 D_{2n} , 若主对角线元素顺次写为 a_1, a_2, \dots, a_{2n} , 副对角线

元素顺次写为 b_1, b_2, \dots, b_{2n} , 则行列式将等于 $\prod_{i=1}^n (a_i a_{2n+1-i} - b_i b_{2n+1-i})$.

例 7 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$

A_{kj} 是 D 中 a_{kj} 的代数余子式, 求证

$$1) \begin{vmatrix} a_{11} + x_1 & a_{12} + x_2 & \cdots & a_{1n} + x_n \\ a_{21} + x_1 & a_{22} + x_2 & \cdots & a_{2n} + x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + x_1 & a_{n2} + x_2 & \cdots & a_{nn} + x_n \end{vmatrix} = D + \sum_{j=1}^n \left(x_j \sum_{k=1}^n A_{kj} \right);$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{21} & a_{32}-a_{22} & \cdots & a_{3n}-a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n-1,1} & a_{n2}-a_{n-1,2} & \cdots & a_{nn}-a_{n-1,n} \end{vmatrix} = \sum_{k,j=1}^n A_{kj};$$

$$3) \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix} = \sum_{k,j=1}^n A_{kj};$$

$$4) \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = D + x \sum_{k,j=1}^n A_{kj}.$$

证明 1) 将左端的行列式按第 1 列拆开, 得

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21} & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix}$$

上式右端第二个行列式为

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_1 \sum_{k=1}^n A_{k1},$$

再将上式右端第一个行列式按第2列拆开，这样继续作下去，最后得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= D + x_1 \sum_{k=1}^n A_{k1} + x_2 \sum_{k=1}^n A_{k2} + \cdots + x_n \sum_{k=1}^n A_{kn} \\ &= D + \sum_{j=1}^n \left(x_j \sum_{k=1}^n A_{kj} \right) \end{aligned}$$

2) 将左端的行列式中第1, 2, ..., n-1行都加到第n行上去，再将第1, 2, ..., n-2行都加到第n-1行上去，这样依次作下去，最后将第1行加到第2行上去，且将第1行元素“1”改写成 $a_{1j} + (1 - a_{1j})$ 的形式，而后用1)的结果，得

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & \cdots & a_{2n} - a_{1n} \\ a_{31} - a_{21} & a_{12} - a_{22} & \cdots & a_{3n} - a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} - a_{n-1,1} & a_{n2} - a_{n-1,2} & \cdots & a_{nn} - a_{n-1,n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} + (1 - a_{11}) & a_{12} + (1 - a_{12}) & \cdots & a_{1n} + (1 - a_{1n}) \\ a_{21} + (1 - a_{11}) & a_{22} + (1 - a_{12}) & \cdots & a_{2n} + (1 - a_{1n}) \\ a_{31} + (1 - a_{11}) & a_{32} + (1 - a_{12}) & \cdots & a_{3n} + (1 - a_{1n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + (1 - a_{11}) & a_{n2} + (1 - a_{12}) & \cdots & a_{nn} + (1 - a_{1n}) \end{vmatrix} \\ &= D + \sum_{k=1}^n (1 - a_{1j}) \sum_{k=1}^n A_{kj} \\ &= D + \sum_{k,j=1}^n A_{kj} - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{kj} = \sum_{k,j=1}^n A_{kj}. \end{aligned}$$

3) 同2)可证，从略。

4) 在1)中，令 $x_i = x (i = 1, 2, \dots, n)$ ，即得。

例8 求证n阶循环行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n),$$

其中 $f(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为所有的 n 次单位根.

证明 取 $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, 且设

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \cdots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}$$

则 $D \cdot d =$

$$\begin{vmatrix} a_1 + \cdots + a_n & a_1 + a_2\varepsilon + \cdots + a_n\varepsilon^{n-1} & \cdots & a_1 + a_2\varepsilon^{n-1} + \cdots + a_n\varepsilon^{(n-1)^2} \\ a_1 + \cdots + a_n & \varepsilon(a_1 + a_2\varepsilon + \cdots + a_n\varepsilon^{n-1}) & \cdots & \varepsilon^{n-1}(a_1 + a_2\varepsilon^{n-1} + \cdots + a_n\varepsilon^{(n-1)^2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 + \cdots + a_n & \varepsilon^{n-1}(a_1 + a_2\varepsilon + \cdots + a_n\varepsilon^{n-1}) & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2}(a_1 + a_2\varepsilon^{n-1} + \cdots + a_n\varepsilon^{(n-1)^2}) \end{vmatrix}$$

$$= f(1)f(\varepsilon)f(\varepsilon^2)\cdots f(\varepsilon^{n-1}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \cdots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}$$

即 $D \cdot d = f(1)f(\varepsilon)f(\varepsilon^2)\cdots f(\varepsilon^{n-1}) \cdot d \quad (*)$

因为, ε 为 n 次本原单位根, 所以 $\varepsilon^i \neq \varepsilon^j$, $i \neq j$, 从而, 1,

$\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}$ 是 n 个互不相同的 n 次单位根, 因此, $d \neq 0$.

从(*)两端消去 d , 得到

$$D = f(1)f(\varepsilon)f(\varepsilon^2)\cdots f(\varepsilon^{n-1}) = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

说明 1) 本例将 F 上的 D 看作 C 上的 D 来处理; 2) 本例中辅助行列式 d 的选取是关键.

例 9 若 $n(n \geq 3)$ 阶行列式 D 的元素为 ± 1 , 证明 $|D| \leq (n-1)((n-1)!)$.

证明 对 D 的阶数 n 用数学归纳法. 当 $n=3$ 时, 由例 5 得, $|D| \leq 4 = (3-1)((3-1)!)$, 结论成立. 设 $n-1$ 时结论成立, 考虑 n 阶行列式 D . 对 D 按任一行展开, 再由条件及归纳假设, 就得

$$\begin{aligned} |D| &= |a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}| \\ &= |\pm M_{i1} \pm M_{i2} \pm \cdots \pm M_{in}| \\ &\leq |M_{i1}| + |M_{i2}| + \cdots + |M_{in}| \\ &\leq n((n-2)((n-2)!)) < (n-1)((n-1)!). \end{aligned}$$

即, 对于 n 阶行列式结论也成立. 根据数学归纳法原理, 结论成立.

说明 本例是一个不等式.

例 10 设 b, a_0, a_1, \dots, a_n 是 $n+2$ 个互不相同的数, $a_0 \neq 0$, 并且

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

证明 $(x-b, f(x)) = 1$.

证明 根据行列式的性质, 得到 $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_n) = 0$, 从而 $x-a_1, x-a_2, \dots, x-a_n$ 均整除 $f(x)$. 由于 a_1, a_2, \dots, a_n 是互不相同的 n 个数, 所以 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ 整

除 $f(x)$ 。根据行列式的定义， $f(x)$ 的首项为 a_0x^n ，所以 $f(x) = a_0(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ 。因为， b 与 a_1, a_2, \cdots, a_n 不同，所以， b 不是 $f(x)$ 的根，从而 $x-b$ 不整除 $f(x)$ 。再由 $x-b$ 是不可约多项式得， $(x-b, f(x)) = 1$ 。

说明 本例是一个与多项式相联系的问题.

四 有关克兰姆规则的证明

这类证明题目直接用克兰姆规则证明，或者用克兰姆规则的思考方法证明。

例11 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是数域 F 中互不相同的数, b_1, b_2, \dots, b_n 是 F 中任意一组给定的数, 证明存在唯一的数域 F 上的多项式 $f(x)$, 使得 $f(a_i) = b_i, i = 1, 2, \dots, n$, 且 $\deg(f(x)) < n$.

证明 考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + \dots + a_1^{n-1}x_n = b_1 \\ x_1 + a_2x_2 + \dots + a_2^{n-1}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + a_nx_2 + \dots + a_n^{n-1}x_n = b_n \end{cases}$$

因为，系数行列式 D 是一个由 a_1, a_2, \dots, a_n 组成的范德蒙行列式，而且 a_1, a_2, \dots, a_n 互不相同，所以， $D \neq 0$ ，从而，由克兰姆规则知，方程组有唯一解。设其解为 $x_1 = c_0, x_2 = c_1, \dots, x_n = c_{n-1}$ ，则多项式 $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}$ 即为所求，因为，显然， $\deg(f(x)) < n$ ，且 $f(a_i) = b_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。又因为该方程组的解唯一，所以这样的多项式也是唯一的。

例12 设 a, b, c, d 是不全为零的实数, 证明方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ bx_1 - ax_2 + dx_3 - cx_4 = 0 \\ cx_1 - dx_2 - ax_3 + bx_4 = 0 \\ dx_1 + cx_2 - bx_3 - ax_4 = 0 \end{cases}$$

只有零解.

证明 根据克兰姆规则, 只需证明系数行列式 $D \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{因为, } D^2 &= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix} \\ &= (a^2+b^2+c^2+d^2)^4, \end{aligned}$$

又, a, b, c, d 是不全为零的实数, 所以, $D \neq 0$.

例13 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$

证明 $(a_{11}f_1(x) + a_{12}f_2(x) + \cdots + a_{1n}f_n(x), a_{21}f_1(x) + a_{22}f_2(x) + \cdots + a_{2n}f_n(x), \cdots, a_{n1}f_1(x) + a_{n2}f_2(x) + \cdots + a_{nn}f_n(x)) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$.

证明 设

[illegible]

则仿克兰姆规则的证明过程, 可得

$$f_1(x) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} g_1(x) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ g_2(x) & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n(x) & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{D} A_{11} g_1(x) + \frac{1}{D} A_{21} g_2(x) + \cdots + \frac{1}{D} A_{n1} g_n(x)$$

从而, $f_1(x)$ 是 $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ 的组合. 同样 $f_2(x), \dots, f_n(x)$ 也都是 $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ 的组合. 由整除的性质知, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 的公因式与 $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ 的公因式相同. 再由最大公因式的定义知, 结论成立.

§5 补充资料

I 行列式的其它定义方法

一 归纳定义法

1 阶行列式: $|a_{11}| = a_{11}$.

$$2 \text{ 阶行列式: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^2 a_{1j} (-1)^{1+j} M_{1j},$$

$$M_{11} = |a_{22}|, \quad M_{12} = |a_{21}|.$$

假设 $n-1$ 阶行列式已经定义, 则可以用 $n-1$ 阶行列式定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} M_{1j},$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad M_{1n} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2, n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n, n-1} \end{vmatrix}.$$

二 置换定义法

把一个 n 级排列变为另一个 n 级排列的变换称为一个 n 级置换, 记为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

即在每个码之下写出它要变成的数码。

一个置换A可以用不同的记法，只要每个数码与它所变成的数码上下对正就行了，如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

一个置换A，当其上下两排列奇偶性相同时称为偶置换；相反时称为奇置换。

一个置换A，当其上下两排列的逆序数之和为偶数时，则为偶置换，为奇数时则为奇置换。当 $n > 1$ 时， n 级置换共有 $n!$ 个，其中奇、偶置换各占一半。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

称为一个 n 阶行列式。共有 $n!$ 项，每项为不同行不同列的 n 个元素的乘积，而当置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ 为偶置换时，此项加正号，为奇置换时加负号。

三 公理化定义法

近代还有用公理化方法定义行列式的。如采用多重线性函数的概念来定义，但是，要求的预备知识较多，不易接受，对于初学者来说，比我们所采用的排列定义法，难度要大得多。

行列式的定义。从全体 n 阶矩阵的线性空间到复数域 \mathbf{C} 的函数

$$\det: M(n, n, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C},$$

$$A = (a_1, \cdots, a_n) \rightarrow \det A = \det(a_1, \cdots, a_n),$$

满足如下三个公理时，称为行列式。

公理1 (n 重线性性) \det 视为任意列 a_i 的函数时是线性映射，即

$$1) \quad \det(a_1, \cdots, a_i + b_i, \cdots, a_n)$$

$$= \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$$

$$2) \quad \det(a_1, \dots, ca_i, \dots, a_n)$$

$$= c \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n), \quad c \in \mathbb{C}.$$

公理2（交错性）若A的两行相同，则 $\det A = 0$ 。

公理3（规范化条件）对于单位矩阵 E_n ， $\det E_n = 1$ 。

II 历史资料点滴

最早引入行列式概念的，是十七世纪日本数学的奠基人关孝和，他在1683年发表的《解伏题之法》一书中，对于行列式及其展开已经有了清楚的叙述。

行列式概念在欧洲最早见于莱布尼兹的著作（1693年），拉格朗日和拉普拉斯也曾研究过这个课题，通常认为它溯源于柯西（1812年）。关于这一理论最系统的叙述则是雅可比的《论行列式的形成与性质》（1841年）一书。

1693年莱布尼兹用指标数的系统集合，表示含两个未知量 x 与 y 的三个线性方程所组成的系数系统。他从三个线性方程的系统中消去两个未知量，得到一个行列式，现在称为方程组的结式。

用行列式的方法解含二个、三个和四个未知量的联立方程可能在1729年由马克劳林开创，且于1748年发表他的遗作《代数论著》中，其法则就是现在所使用的法则。

克兰姆于1750年把马克劳林的法则发表在他的《线性代数分析导言》中，他的行列式和现在一样，是一些乘积的和，每一乘积的符号是这样确定的，即从标准次序出发，得到这些元素的排列所需的重排数，当该数是偶数时带正号，否则就带负号。

1764年法国数学家培祖把确定行列式每一项的符号系统化了。他给出了含 n 个未知量的 n 个方程组成的齐次线性方程组，证明了系数行列式等于零是这个方程组有非零解的条件。他还得出了行列式按一行（列）展开的法则。

范德蒙脱离开线性方程组，独立地对行列式理论作系统研

究，给出行列式的定义与确定项的符号的法则，获得了按若干行展开的部分法则，被认为是行列式理论的奠基人。

参照克兰姆和培祖的工作，拉普拉斯在1722年的论文《对积分和世界体系的探讨》中，证明了范德蒙的一些规则，推广了展开行列式的方法，得到了现在的拉普拉斯定理。

行列式一词是柯西给出的，现在的行列式的两条竖线的记号是他于1841年引进的。他的著作给出了行列式的第一个系统的、几乎是近代的处理。他的主结果之一是行列式的乘法规则（虽然拉格朗日已经对三阶行列式给出了这个规则，但因为他的行列式的行是一个四面体的顶点坐标，未被引向普遍化）。他还改进了拉普拉斯定理，并给了一个证明。

1825年Heinrich F. Scherk 在他的《数学 论文》中给出了行列式的几个新的性质，如三角形行列式等。

1877年G. W. Hill 公布关于月球理论方面的重要论文时，对无穷阶行列式的应用很多。

当行列式的元素是 t 的函数时，其导数公式首先由雅可比于1841年给出。

1925年，F. Schweins 在公布的著作中有繁行列式的重要结论，由于符号繁杂而未为人们所注意，后来，为Dylyester, Kronecker 及其它人重新发现。

行列式的数值性质，原始除式的理论，创立较晚，为H. J. D. Dmith, Weierstrass, Kronecker, Frobenius 所研究。

T. Muir 关于行列式的书，论述了截至1841年的理论，完全精细，是行列式的第一部巨典。

§6 基本习题

1 对于任意的 $k, 0 \leq k \leq c_n^2, n \geq 2$, 证明: 存在逆序数为 k 的 n 级排列.

2 计算 $\tau(369 \cdots (3n) 147 \cdots (3n-2) 258 \cdots (3n-1))$.

3 若 n 阶行列式 D 有 k 行和 h 列的交点处的元素全为 0, 且 $k+h > n$, 证明 $D=0$.

4 设 a_{ij} 是整数, $i, j=1, 2, \dots, n$, 证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - \frac{1}{2} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \frac{1}{2} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \frac{1}{2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

5 计算

$$1) D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & -n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -2 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \quad 2) D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0).$$

6 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

7 计算

$$1) D_n = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix};$$

$$2) D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0).$$

$$8 \quad \text{设 } f(x) = \begin{vmatrix} g_1(x) & g_1(x^2) & \cdots & g_1(x^n) \\ g_2(x) & g_2(x^2) & \cdots & g_2(x^n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n(x) & g_n(x^2) & \cdots & g_n(x^n) \end{vmatrix} \quad (n > 1)$$

证明 $f(x) = 0$ 或 $f(x)$ 在复数域上可约.

9 设 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 是次数不超过 $n-2$ 的多项式, a_1, a_2, \dots, a_n 是任意数, $n \geq 1$, 求证

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

10 证明线性方程组

[illegible]

的解是 $x_i = \frac{n(3-n)}{2(n-1)} + n - i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

第三章 线性方程组

§1 概括说明

线性方程组的理论在线性代数中的地位是突出的，它不仅是线性代数的最基本的内容，而且也是线性代数的理论基础。后面一些章节的许多问题都要归结为线性方程组的问题。同时，在数学的许多分支及其它许多领域中，线性方程组也有广泛的应用。

关于线性方程组的各种问题，本章得到了圆满的解答，所得到的结果是十分完美的。在研究问题的方法与模式上，有启发作用。本章除了应用行列式这一工具外，还引进了向量和矩阵两种工具。本章所论述的概念、结论、方法，都是基本的，在整个线性代数中起着十分重要的作用，将要经常用到。

本章的内容分为四个部分：高斯消元法，线性方程组与矩阵； n 维（数）向量及其线性相关性，矩阵的秩；线性方程组相容性定理，线性方程组解的结构，线性方程组的解法；二元高次方程组。

高斯消元法是中学数学中所讲述的消元法的发展，其基本思想是：逐次地把方程组中的一部分方程变为含未知量较少的方程，从而将方程组化为阶梯形的规范形式，并且按一定程序进行。高斯消元法不仅给出了实用的计算方法，而且可以建立方程组有解的判定定理。

对于线性方程组施行同解变换，主要就是对系数和常数项进行运算，因此，可以略去未知量而只把方程的系数和常数项分离出来排成一个表，用这个表代替方程组，这种表就是矩阵。于是，线性方程组和矩阵可以建立一一对应关系。由方程组的三种同解变换引入矩阵的初等变换。解线性方程组就可以在矩阵上得

向量概念自身就是线性代数的最重要的研究对象之一。本章引入 n 维(数)向量的概念, 定义向量的线性运算, 研究线性相关性。 n 维向量的线性相关性是关键内容, 这是因为: 一方面, 这是解决本章问题所必须的; 另一方面, 这也是对后面线性空间一章中难点的分散。

对于矩阵的秩，本章主要是给出两种定义方法，即向量定义法和行列式定义法，进一步的研究将在矩阵一章中进行。

线性方程组的相容性定理与线性方程组的解的结构组成线性方程组的基本理论，是本章的中心内容。解的结构问题就是用有限个解来刻划无限个解的问题，是一个深刻的思想方法。线性方程组的解法，本质上就是两种：克兰姆规则和高斯消元法。

二元高次方程组的解法，基本思想是消元。本章给出了理论及具体解法，在推导过程中应用了线性方程组的理论。

本章的补充资料是：非齐次线性方程组的基础解系，线性方程组的近似解法，主元素消去法，历史资料点滴。

I 高斯消元法

一 线性方程组

[illegible]

的方程组称为数域 F 上的一个 n 元线性方程组,其中 $a_{ij} \in F, i=1, 2, \dots, s, j=1, 2, \dots, n$,称为系数; $b_i \in F, i=1, 2, \dots, s$,称为常数项; x_1, x_2, \dots, x_n 是文字,称为未知量.

设有数域 F 上的有序数组 (k_1, k_2, \dots, k_n) . 若将 x_1, x_2, \dots, x_n 依次用 k_1, k_2, \dots, k_n 代入, 使得(1)中的每个方程均成为数域 F 上

的等式, 则称 (k_1, k_2, \dots, k_n) 为方程组(1)的一个解. 方程组的解的全体, 称为它的解集合. 若两个 n 元线性方程组的解集合相等, 则称这两个方程组同解.

称下面的三种变换为线性方程组的初等变换: 1) 用一个非零的数乘以某一个方程; 2) 把一个方程的倍数加到另一个方程; 3) 互换两个方程的位置.

定理. 初等变换把线性方程组变为同解的线性方程组.

初等变换是解线性方程组的基本方法和基本步骤.

讨论线性方程组, 要解决下面四个问题: 1) 线性方程组是否有解, 找出有解的必要充分条件; 2) 有解时解的个数; 3) 有解时怎样求解; 4) 当解不止一个时, 解之间的关系.

二 矩阵

实际上, 给定数域 F 上的一个由 s 个方程组成的 n 元线性方程组, 就是给定 F 上的 $s \times (n+1)$ 个数, 且这些数依一定的次序排为一个矩形的表. 至于未知量用什么文字表示, 是无关紧要的. 对线性方程组施行初等变换, 就是对其系数、常数项进行运算. 于是, 就引入矩阵的概念.

由数域 F 上的 $s \times m$ 个数排成的 s 行 m 列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sm} \end{pmatrix}$$

称为数域 F 上的一个 $s \times m$ 矩阵, 简记为 $(a_{ij})_{s \times m}$, a_{ij} 称为矩阵的元素, i 称为 a_{ij} 的行指标, j 称为 a_{ij} 的列指标. $n \times n$ 矩阵称为 n 阶矩阵.

$$\text{矩阵} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

(1) 与 \bar{A} 的对应是线性方程组与矩阵之间的一一对应。给定数域 F 上的一个线性方程组当且仅当给定 F 上的一个矩阵。

三 高斯消元法

引理. 设有线性方程组

其中 $a_{11} \neq 0, a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, i=2, \dots, s, j=2, \dots, n,$

则(1)有解当且仅当(3)有解.

• 107 •

步骤. 第一步, 化阶梯形方程组: 若(1)中 x_1 的系数全为0, 则考虑 x_2 的系数; 若 x_1 的系数不全为0, 则可经初等变换3), 使第1个方程的 x_1 的系数不为0, 即 $a_{11} \neq 0$. 经初等变换2), 把(1)化为(2). 然后, 对于(3)同样进行. 如此下去. 第二步, 回代过程: 由最后一个方程, 求得一个未知量, 再依次向前回代, 逐个地求出一切未知量.

定理. 在齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

四 加强的阶梯形矩阵

若矩阵 $(a_{ij})_{s,n}$ 的元素适合条件: 1) $a_{ij} = 0$, 对所有的 $i > j$; 2) 对于任意 $i = 1, 2, \dots, s$, 当 $a_{i1} = \dots = a_{i,j-1} = 0$, $a_{ij} \neq 0$ 时, 从第 $i+1$ 行至第 s 行的第 1 列至第 j 列的元素全为零; 3) 对于任意的零行, 其下没有非零行, 则称这样的矩阵是梯形矩阵.

定理. 任意矩阵都可以经过初等行变换化为加强的阶梯形矩

阵.

高斯消元法反映在线性方程组的增广矩阵 \overline{A} 上,就是用初等行变换将 \overline{A} 化为阶梯形矩阵,同时将系数矩阵 A 化为加强的阶梯形矩阵.

II 向量的线性相关性、矩阵的秩

一 n 维向量及其线性运算

数域 F 中的 n 个数组成的有序数组 (a_1, a_2, \dots, a_n) 称为数域 F 上的一个 n 维向量,常用小写字母 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 表示.其中 a_i 称为该向量的第 i 个分量.

若 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 与 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 的对应分量都相等,即 $a_i = b_i, i = 1, 2, \dots, n$,则称这两个向量相等,记为 $\alpha = \beta$.

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 与 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 是数域 F 上的两个 n 维向量, k 是数域 F 中的一个数,则

α 与 β 的和为: $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$;

k 与 α 的数量乘积为: $k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$.

分量全为0的向量 $(0, 0, \dots, 0)$ 称为零向量,记为0.

向量 $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ 称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的负向量,记为 $-\alpha$.

设 α, β, γ 是数域 F 上的任意 n 维向量, k, l 是数域 F 中的任意数,则有

$$1) \alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad 2) (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$

$$3) \alpha + 0 = \alpha, \quad 4) \alpha + (-\alpha) = 0,$$

$$5) k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta, \quad 6) (k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha,$$

$$7) k(l\alpha) = (kl)\alpha, \quad 8) 1\alpha = \alpha.$$

数域 F 上的 n 维向量的全体,同时考虑到定义在它们上面的线性运算(加法与数量乘法),称为数域 F 上的 n 维向量空间,记为 F^n .

对于任意的 $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in F^n$ 及任意的 $k, l, k_1,$

$k_2, \dots, k_s \in \mathbb{F}$, 有

1) 方程 $x + \beta = \alpha$ 在 F^n 中有且仅有一解 $x = \alpha + (-\beta)$, 称 $\alpha + (-\beta)$ 是 α 与 β 的差, 记为 $\alpha - \beta$, 即 $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$;

$$2) \ 0\alpha = 0, \ k0 = 0; \qquad 3) \ (-k)\alpha = k(-\alpha) = -k\alpha;$$
$$4) \quad k(a-\beta) = ka - k\beta, \quad (k-1)a = ka - 1a;$$

5) $k \neq 0, \alpha \neq 0 \Leftrightarrow k\alpha \neq 0$; 6) $k\alpha = 0 \Leftrightarrow k = 0$ 或 $\alpha = 0$;

$$7) \quad k(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s) = k\alpha_1 + k\alpha_2 + \cdots + k\alpha_s;$$
$$8) (k_1 + k_2 + \dots + k_s)\alpha = k_1\alpha + k_2\alpha + \dots + k_s\alpha.$$

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta \in \mathbf{F}^n$. 若有 $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbf{F}$, 使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$, 则称 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合, 或称 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出.

设有 F^n 中的向量 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = 1, 2, \dots, s$,
 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 则 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出 \Leftrightarrow 线性方程组

[illegible]

有解.

向量 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\varepsilon_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ 称为 n 维单位向量. 任一 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 都可以表为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的线性组合 $\alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n$.

若由 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的分量为行所组成的行列式不为 0, 则任一个 n 维向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出.

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 中的每个向量都可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性表出, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性表出.

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 可以由向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ 线性表出, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 可以由向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ 线性表出. 简言之, 线性表出具有传递性.

若两个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 可以互相线性表出, 则称它们等价. 向量组等价具有反身性、对称性、传递性.

二 向量的线性相关性

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in F^n$. 若有不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s \in F$, 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 不线性相关, 即 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ 仅当 $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$ 时成立, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

α 线性相关 $\Leftrightarrow a=0$. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s>1)$ 线性相关 \Leftrightarrow 存在一个向量可以由其余向量线性表出. α 线性无关 $\Leftrightarrow a \neq 0$. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s>1)$ 线性无关 \Leftrightarrow 其中任一向量均不能由其余向量线性表出.

一个向量组的一部分向量所构成的向量组称为该向量组的一个部分组. 若一向量组有一个部分组线性相关, 则该向量组线性相关. 若一向量组线性无关, 则它的任一部分组均线性无关.

若一向量组中含有零向量，则该向量组线性相关。若一向量组线性无关，则该向量组中的任一向量均不为零向量。

设有向量组 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = 1, 2, \dots, s$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 齐次线性方程组

[illegible]

有非零解. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关 \Leftrightarrow 齐次线性方程组 (5) 仅有零解. 当 $s=n$ 时, 可以根据由分量为行所组成的行列式是否为零来判定.

设有量组 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i=1, 2, \dots, s$. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则每个向量均添上 k 个分量后所成的 s 个 $n+k$ 维向量仍线性无关. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则每个向量均去掉 k ($k < n$) 个分量后所得的 s 个 $n-k$ 维向量仍线性相关.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是两个向量组. 若: 1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 2) $t > s$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 必线性相关.

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性无关, 则 $t \leq s$.

$n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

两个线性无关的等价向量组所包含向量的个数必相同.

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性无关, 又 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性表出.

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性无关, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性表出, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \beta$ 线性无关.

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性无关, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性表出, 则表示方法唯一.

三 向量组的秩

设有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 及其部分组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$. 若: 1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性无关; 2) 对于任一 α_i , $i=1, 2, \dots, s$, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_i$ 均线性相关, 则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大(线性)无关组.

设 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大无关组,

则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_t}$ 等价.

设有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ ($t \geq 2$), 且 $\alpha_1 \neq 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性无关 \Leftrightarrow 对于任意的 $i=2, 3, \dots, t$, α_i 均不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性表出.

完全由零向量组成的向量组没有极大无关组; 若一个向量组中含有非零向量, 则该向量组一定有极大无关组.

给定了一个含有非零向量的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 则可以用下述方法求出它的一个极大无关组: 设 α_{i_1} 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的第一个非零向量, 则考虑部分向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1+1}, \dots, \alpha_s$. 保留 α_{i_1} , 而后从 α_{i_1+1} 开始逐个检查. 若有某个向量可以被它前面留下来的那些向量线性表出, 则把这个向量去掉, 否则, 就把这个向量留下来. 最后, 若留下来的向量是 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_t}$, 则这些向量就组成一个极大无关组. 例子见 §4, I, 二.

定理. 以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为列(行), 写成一个矩阵, 对矩阵实行初等行(列)变换, 这种变换保持 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 间的线性关系不变.

给定了一个含有非零向量的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 根据该定理还可以用下述方法求出它的一个极大无关组: 1) 以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为列写成矩阵, 2) 初等行变换化为加强的阶梯形矩阵, 3) 写出线性关系. 例子见 §4, I, 二.

根据该定理还可以判定线性相关性.

一个向量组的极大无关组不一定是唯一的. 它的任一个线性无关的部分组都可以扩充成一个极大无关组. 一个向量组的任意两个极大无关组都是等价的, 从而所包含向量的个数相等.

向量组的极大无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩; 只含零向量的向量组的秩是零. 秩是向量组自身的属性, 是唯一确定的.

若向量组(I)可以向量组(II)线性表出, 则(I)的秩

$\leq (\text{II})$ 的秩。若两个向量组等价，则它们的秩相等。

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩是 t ，则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 t 个线性无关的向量均构成它的一个极大无关组。 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关当且仅当它的极大无关组是其自身。

四 矩阵的秩

矩阵的一行可视为一个向量，称为行向量。同样地，一列也可视为一个向量，称为列向量。所有行向量组成矩阵的行向量组，所有列向量组成矩阵的列向量组。

矩阵的行向量组的秩称为矩阵的行秩，矩阵的列向量组的秩称为矩阵的列秩。矩阵 A 的行秩与列秩相等，称为矩阵 A 的秩，记为秩 (A) 。

在 $s \times m$ 矩阵 A 中，任意取定 k 行和 k 列 ($k \leq \min(s, m)$)，由位于这些行与列的交点上的 k^2 个元素按原来的次序组成一个 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式。 A 的 k 阶子式有 $C_s^k C_m^k$ 个。当 A 是 n 阶矩阵时，用 $|A|$ 表示 A 的 n 阶子式，称为 A 的行列式。

矩阵 A 的秩 $\geq r \Leftrightarrow A$ 有一个 r 阶子式不为零；矩阵 A 的秩 $\leq r \Leftrightarrow A$ 的一切 $r+1$ 阶子式全为零。

矩阵 A 的非零子式的最高阶数称为 A 的秩；当 A 没有非零子式时，称 A 的秩为 0。

关于矩阵 A ，下面四条相互等价：1) A 的秩是 r ；2) A 的非零子式的最大阶数是 r ；3) A 有一个 r 阶子式 $D \neq 0$ ，且一切 $r+1$ 阶子式（若有的话）都等于 0；4) A 有一个 r 阶子式 $D \neq 0$ ，且包含 D 的一切 $r+1$ 阶子式（若有的话）都等于 0。

矩阵秩的两种定义互相等价。矩阵的初等变换不改变它的秩。
求矩阵秩的方法：极大无关组法、非零子式法、初等变换法。

II 线性方程组的理论

· 一 线性方程组相容性定理

齐次线性方程组的基础解系具有下述性质：1) 若 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是 (6) 的一个基础解系， $k \in \mathbf{F}, k \neq 0$ ，则 $k\eta_1, k\eta_2, \dots, k\eta_t$ 也是 (6) 的一个基础解系，从而，若 (6) 有基础解系，则 (6) 必有无穷多个基础解系；2) (6) 的任意两个基础解系所含解向量的个数相等，换言之，基础解系所含解向量的个数由 (6) 唯一决定；3) 与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解系；4) 若基础解系含有 t 个向量，则任意 t 个线性无关的解向量均构成一个基础解系。

若 (6) 的系数矩阵的秩 $r < n$ ，则 (6) 有基础解系，且基础解系含有 $n-r$ 个解向量。此时，(6) 的一个基础解系可以如此求出：用消元法解 (6)，不妨设自由未知量是 $(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n)$ ，让其分别取值 $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ ，则所得的 $n-r$ 个解 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 即是。

若 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是齐次线性方程组 (6) 的一个基础解系，则 (6) 的全部解就是 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_{n-r}\eta_{n-r}$ ，其中 k_1, k_2, \dots, k_{n-r} 是数域 \mathbf{F} 中的任意的数。

把一般线性方程组 (1) 的常数项均变为零，则得到齐次线性方程组 (6)，称 (6) 是 (1) 的导出组。

若 γ_0 是线性方程组 (1) 的一个解，则方程组 (1) 的任一个解都可以表示为 $\gamma = \gamma_0 + \eta$ 的形式，其中 η 是导出组 (6) 的一个解。

为了求出方程组 (1) 的全部解，只要求出方程组 (1) 的一个解 γ_0 ，常称为 (1) 的一个特解。再求出 (1) 的导出组 (6) 的一个基础解系 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 。从而，(1) 的全部解就是 $\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_t\eta_t$ ，其中 k_1, k_2, \dots, k_t 是数域 \mathbf{F} 中的任意的数。

三 线性方程组的解法

消元法。对 (1) 的增广矩阵 \bar{A} 施行初等行变换，化为阶梯形矩阵，判断是否有解，而在有解时，再施行初等行变换，把 (1) 的系数矩阵 A 化为加强的阶梯形矩阵，即可直接写出解。

[illegible]
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix},$$

$j=1, 2, \dots, r$, 则得到用自由未知量 x_{r+1}, \dots, x_n 表示 x_1, x_2, \dots, x_r 的公式

.....

$$x_r = D_r/D = d_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{rn}x_n,$$

四 线性方程组理论的几何解释

中的每个方程均表示平面，其解是平面的交点的坐标。

对于(7)的系数矩阵A与增广矩阵 \overline{A} , 有

- 1) A与 \overline{A} 的秩均为1, 两平面重合;
- 2) A的秩为1, \overline{A} 的秩为2, 两平面平行;
- 3) A与 \overline{A} 的秩均为2, 两平面相交, 设 x_3 为自由未知量,

则交线的方程为
$$\begin{cases} x_1 = d_1 + c_1 t \\ x_2 = d_2 + c_2 t \\ x_3 = t \end{cases}.$$

IV 二元高次方程组

一 两个一元多项式的结式

设有 $F(x)$ 中的两个非零多项式 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, $g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m$, 它们的系数 a_0, b_0 不全为零, 则 $f(x), g(x)$ 在 $F(x)$ 中有非常数的公因式的必要充分条件是, 在 $F(x)$ 中存在非零的次数小于 m 的多项式 $u(x)$ 与次数小于 n 的多项式 $v(x)$, 使 $u(x)f(x) = v(x)g(x)$,

定义. 行列式

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & \\ & & \cdots & & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_m & \\ & & \cdots & & & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots b_m \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \text{ 行} \\ \\ \\ n \text{ 行} \end{array}$$

称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式, 记为 $R(f, g)$.

性质. $R(g, f) = (-1)^{n(n+m-1)} R(f, g) = (-1)^{nm} R(f, g)$

定理. 当 $m > 0, n > 0$ 时, $R(f, g) = 0 \Leftrightarrow f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $F(x)$ 中有非常数的公因式或者 $a_0 = b_0 = 0$.

对于 $C(x)$ 中的多项式 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, n > 0$

与 $g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m, m > 0$, 成立:

1) 当 $a_0 b_0 \neq 0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公根 $\Leftrightarrow R(f, g) = 0$;

2) $R(f, g) = 0 \Leftrightarrow f(x)$ 与 $g(x)$ 有公根或 $a_0 = b_0 = 0$;

3) 若 $a_0 = b_0 = 1, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 $f(x)$ 的 n 个复根, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 是 $g(x)$ 的 m 个复根, 则 $R(f, g) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j)$;

4) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 $f(x)$ 的 n 个复根, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 是 $g(x)$ 的 m 个复根, $a_0 b_0 \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} R(f, g) &= a_0^m g(\alpha_1) g(\alpha_2) \cdots g(\alpha_n) = a_0^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) \\ &= (-1)^{mn} b_0^n f(\beta_1) f(\beta_2) \cdots f(\beta_m) = (-1)^{mn} b_0^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j). \end{aligned}$$

设 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ 是复数域 \mathbb{C} 上的一个 n ($n > 1$) 次多项式, $f'(x)$ 表示 $f(x)$ 的导数, $D(f)$ 表示 $f(x)$ 的判别式, 则 $R(f, f') = (-1)^{n(n-1)/2} a_0 D(f)$, 从而, $f(x)$ 有重根 $\Leftrightarrow R(f, f') = 0$.

二 二元高次方程组的解法

设有复数域 \mathbb{C} 上的二元高次方程组

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

则可以将 $f(x, y), g(x, y)$ 写为

$$f(x, y) = a_0(y) x^n + a_1(y) x^{n-1} + \cdots + a_n(y),$$

$$g(x, y) = b_0(y) x^m + b_1(y) x^{m-1} + \cdots + b_m(y),$$

其中 $a_i(y), b_j(y), i = 0, 1, \cdots, n, j = 0, 1, \cdots, m$ 是 y 的多项式, 把 $f(x, y), g(x, y)$ 看作 x 的多项式, 并求结式, 记为

$$R_x(f, g) = \begin{vmatrix} a_0(y) & a_1(y) & a_2(y) & \cdots & a_n(y) \\ a_0(y) & a_1(y) & \cdots & \cdots & a_n(y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0(y) & a_1(y) & \cdots & \cdots & a_n(y) \\ b_0(y) & b_1(y) & b_2(y) & \cdots & b_m(y) \\ b_0(y) & b_1(y) & \cdots & \cdots & b_m(y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_0(y) & b_1(y) & \cdots & \cdots & b_m(y) \end{vmatrix}$$

若 (x_0, y_0) 是方程组(8)的一个复数解, 则 y_0 就是 $R_x(f, g)$ 的一个根; 反之, 若 y_0 是 $R_x(f, g)$ 的一个复根, 则 $a_0(y_0) = b_0(y_0) = 0$, 或者存在一个复数 x_0 , 使 (x_0, y_0) 是(8)的一个解。

解法及例子. 见 §4, I, 六.

§3 重点难点

本章的主题词是: 线性方程组, 矩阵, 系数矩阵, 增广矩阵, 高斯消元法, 初等变换, 阶梯形方程组, 阶梯形矩阵, 加强的阶梯形矩阵; n 维向量, 线性组合, 向量组等价, 线性相关, 线性无关, 极大(线性)无关组, 向量组的秩, 矩阵的行(列)秩, 矩阵的 k 阶子式, 矩阵的秩; 相容性定理, 解的结构, 解向量, 基础解系, 导出方程组, 特解, 全部解, 公式法, 一般解(通解); 二元高次方程组, 结式.

本章的基本方法是: 高斯消元法, 加强的阶梯形矩阵的化法, 线性组合求法, 极大无关组求法, 线性相关性判定法, 矩阵秩的求法, 基础解系求法, 求全部解的方法, 求一般解的方法, 二元高次方程组的解法.

本章的重点是: 向量的线性相关性, 线性方程组的理论, 二元高次方程组的解法.

向量的线性相关性, 不仅是 n 维向量的基本研究课题, 而且

是定义矩阵的秩、研究线性方程组的相容性、定义齐次线性方程组的基础解系等的基础，可以说，它贯穿于全章，因此，成为本章的一个重点。

线性方程组的理论是本章的中心，它包括四个部分：相容性定理、解的结构、解法、几何解释。这些内容以后经常用到，特别地，解线性方程组、求齐次线性方程组的基础解系，更是如此。高斯消元法中所体现出的形变解不变思想、标准形的思想，以后将反复出现。用增广矩阵代替线性方程组，求解方程组在矩阵上进行，这种分离系数的思想也很重要。因此，成为本章的一个重点。

二元高次方程组的解法，不仅自身是一个重要的研究课题，而且对中学数学的有关内容有具体的指导作用。因此，成为本章的一个重点。

本章的难点是：向量的线性相关性，齐次线性方程组的基础解系，结式。

向量的线性相关性，既是本章的一个重点，又是本章的一个难点。向量组线性相关、线性无关的概念，比较抽象，不容易理解其实质，初学者往往感到困惑，难以掌握；与这一概念有关的性质、定理、概念等也较为困难，而且关系复杂头绪多，因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1) 理解并掌握线性组合的概念，通过一个向量是若干个向量的线性组合的事实，初步理解向量间的线性关系；2) 由线性组合入手理解一向量组的向量之间的关系，从而理解“相关”与“无关”的含义；3) 研究线性相关与线性无关定义的几种等价形式，以加深理解其实质；4) 利用定义来证明一些向量组线性相关或线性无关，并总结出一般的途径，通过实践加深理解；5) 通过判断一些有关结论的是与非，从正反两方面加深理解。

齐次线性方程组基础解系的定义中用到线性无关与线性组合

的概念,较为复杂;用有限多个解向量(基础解系)表示无限多个解,不易理解;关于基础解系定理的证明中也有不易理解的地方;因此,成为本章的一个难点.解决困难的方法是:1)用极大无关组的概念作类比,理解基础解系的概念;2)通过具体求基础解系,加深理解关于基础解系的定理的证明;3)通过关于基础解系的结论来加深理解.

结式的引入牵扯到多项式的有关问题及齐次线性方程组的理论,其表现形式的行列式较为复杂,一些结论也较难证明,因此,成为本章的一个难点.解决困难的方法是:1)搞清楚 $F(x)$ 中多项式 $f(x)$, $g(x)$ 有非常数公因式的必要充分条件,从而搞清楚结式的引入及组成;2)用具体的例子来加深理解;3)通过解二元高次方程组进一步认识结式的组成及意义.

§4 习题类解

I 计算题

一 解线性方程组

解线性方程组一般采用消元法,而少用或不用公式法.步骤是:对增广矩阵进行初等行变换,使系数矩阵化为阶梯形矩阵,即可判定是否有解;当有解时,进一步对增广矩阵进行初等行变换,使系数矩阵化为加强的阶梯形矩阵,即可写出解.

例1 解下列线性方程组

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases} & 2) \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1; \end{cases} \\
 3) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ \quad \quad x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 \quad \quad + x_4 = 1 \\ \quad -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} &
 \end{array}$$

解 1) 因为,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以, 方程组无解.

2) 因为,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以, 方程组的解是 $x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}x_2$, $x_3 = -2$, 其中 x_2 是自由未知量.

3) 因为,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以，方程组的解是 $x_1 = -8$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$, $x_4 = 0$.

说明 本例中的三个小题分别说明了线性方程组解的个数的三种情况.

例2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}.$$

分析 本例的系数与常数项中有文字出现，此时，仍然按步骤进行，经过若干步之后，对于文字的取值进行讨论，以确定有解的条件，进而，求出线性方程组的解。类似的更为复杂的例子仍如此解决。

解 因为，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & a-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & b-5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$$

所以，当且仅当 $a=0$ 与 $b=2$ 时，线性方程组有解。此时，其解是： $x_1 = -2 + x_3 + x_4 + 5x_5$, $x_2 = 3 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5$ ，其中 x_3, x_4, x_5 为自由未知量。

二 向量间的线性关系

将向量 β 表示为向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合, 方法是: 由 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s$ 出发, 考虑分量相等的关系, 得到关于 x_1, x_2, \dots, x_s 的线性方程组, 而后解方程组. 当有解时, 求得一解 (k_1, k_2, \dots, k_s) , 从而, $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$; 当无解时, β 不能表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合.

求非零向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大无关组, 其方法见 § 2, I, 二.

例 3 将 $\beta = (0, 0, 0, 1)$ 表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (1, 1, 0, 1), & \alpha_2 &= (2, 1, 3, 1), \\ \alpha_3 &= (1, 1, 0, 0), & \alpha_4 &= (0, 1, -1, -1).\end{aligned}$$

解 设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$, 则

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_2 &- x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 &- x_4 = 1. \end{cases}$$

解得, $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 0$, 所以, $\beta = \alpha_1 - \alpha_3$.

例 4 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大无关组:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (1, -1, 2, 4) & \alpha_2 &= (0, 3, 1, 2), \\ \alpha_3 &= (3, 0, 7, 14), & \alpha_4 &= (1, -1, 2, 0), \\ \alpha_5 &= (2, 1, 5, 6).\end{aligned}$$

解 1 取 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)$; 因为 α_2 不能由 α_1 线性表出, 所以取 $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)$; 因为 $\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2$, 所以不取 α_3 ; 因为 α_4 不能由 α_1, α_2 线性表出, 所以取 $\alpha_4 = (1, -1, 2, 0)$; 因为 $\alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$, 所以不取 α_5 ; 因此, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是一个极大无关组.

解 2 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 为列写成一个矩阵, 而后进

行初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关, 且 $\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$, 所以, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是一个极大无关组.

说明 1) 本例中解 2 的方法较方便; 2) 利用解 2 的方法也可以求线性组合; 3) 利用解 2 的方法也可以判断一向量组线性相关或线性无关; 4) 利用解 2 的方法还可以求向量组的秩, 也就是确定极大无关组所含向量的个数.

三 求矩阵的秩

求矩阵的秩, 一般可采取下列方法: 1) 对矩阵同时施行初等行变换与初等列变换, 直至化得的矩阵的秩显然可确定时为止; 2) 确定一个 r 阶子式 $D \neq 0$, 而包含 D 的所有 $r+1$ 阶子式全为 0, 从而秩为 r ; 3) 上面两种方法合并使用.

方法 1) 的优点是简单、迅速, 缺点是不能决定行(列)向量组的极大无关组; 方法 2) 的优点是可以决定行(列)向量组的极大无组, 缺点是一般计算量较大. 应根据不同的要求选取方法.

例 5 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 10 \\ 1 & 11 & 3 & 6 & 16 \\ 1 & -19 & -7 & -14 & -34 \end{pmatrix},$$

试求 A 的秩.

解 1 对A施行初等变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 10 \\ 1 & 11 & 3 & 6 & 16 \\ 1 & -19 & -7 & -14 & -34 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 9 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & -21 & -7 & -14 & -35 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

显然, B的秩为 2, 从而A的秩也为 2.

解 2 A有一个二阶子式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$

而A的所有包含D的三阶子式都等于零:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 11 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 10 \\ 1 & 11 & 16 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & -19 & -7 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & -19 & -14 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 10 \\ 1 & -19 & -34 \end{vmatrix} = 0,$$

所以, A的秩为 2.

四 求基础解系、全部解

求齐次线性方程组的基础解系, 方法是: 对其系数矩阵施行初等行变换, 使其系数矩阵变为加强的阶梯形矩阵, 即可直接写出一个基础解系.

求线性方程组的全部解, 方法是: 求出一特解 γ_0 , 求出其导出组的一个基础解系 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$. 写出全部解 $\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_t\eta_t$, 其中 k_1, k_2, \dots, k_t 为 F 中的任意数.

例 6 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系，并写出其全部解。

解 因为，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以，它的一个基础解系是： $\eta_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$ ， $\eta_2 = (1, -2, 0, 1, 0)$ ， $\eta_3 = (5, -6, 0, 0, 1)$ ，它的全部解是： $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3 = (k_1 + k_2 + 5k_3, -2k_1 - 2k_2 - 6k_3, k_1, k_2, k_3)$ ，其中 k_1, k_2, k_3 是 \mathbf{F} 中任意的数。

例7 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{的全部解。}$$

解 因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以, 方程组的一特解 $\gamma_0 = (\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0)$, 其导出组的一基础解系是: $\eta_1 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0)$, $\eta_2 = (-\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, 0, 1)$, 其全部解为 $\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 = (\frac{5}{4} + \frac{3}{2}k_1 - \frac{3}{4}k_2, -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}k_1 + \frac{7}{4}k_2, k_1, k_2)$, 其中 k_1, k_2 是 \mathbf{F} 中任意的数.

五 线性方程组的应用

有些几何问题或其它问题, 归结为解线性方程组.

例 8 试求四点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$ 共圆的必要充分条件.

解 设圆的一般方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 则四点共圆的必要充分条件是以 D, E, F 为未知量的方程组

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0 \\ x_4^2 + y_4^2 + Dx_4 + Ey_4 + F = 0 \end{cases}$$

有解, 即矩阵

$$\begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix}$$

有相同的秩.

例 9 试求通过点 $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 0)$, $M_3(-1, 0)$, $M_4(1, 1)$, $M_5(-1, 1)$ 的二次曲线方程.

解 设二次曲线的一般方程为 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, 将各点的坐标代入, 得到以 A, B, C, E, F 为未知量的线性方程组

$$\begin{cases} F=0 \\ A+D+F=0 \\ A-D+F=0 \\ A+B+C+D+E+F=0 \\ A-B+C-D+E+F=0, \end{cases}$$

解这个方程组，得： $A=B=D=F=0$ ， $C=-E$ ， E 为自由未知量，取 $E=-1$ ，从而 $C=1$ ，所求的二次曲线的方程为 $y^2-y=0$ 。

六 解二元高次方程组

解二元高次方程组的步骤是：1) 将方程改写为按一个未知量（不妨为 y ）降幂排列；2) 写出结式 $R_y(f, g)$ ，并求出其复根 x_1, \dots, x_k ；3) 对于每个 x_i ，代入原方程组，得到两个 y 的多项式，求它们的公根；4) 写出方程组的解。

例10 解方程组

$$\begin{cases} y^2 - 7xy + 4x^2 + 13x - 2y - 3 = 0 \\ y^2 - 14xy + 9x^2 + 28x - 4y - 5 = 0. \end{cases}$$

解 原方程组改写为

$$\begin{cases} y^2 - (7x+2)y + (4x^2 + 13x - 3) = 0 \\ y^2 - (14x+4)y + (9x^2 + 28x - 5) = 0, \end{cases}$$

求得 $R_y(f, g) = -24x(x-1)(x-2)(x+2)$ ，其四个根为 $0, 1, 2, -2$ 。

用 $x=0$ 代入得
$$\begin{cases} y^2 - 2y - 3 = 0 \\ y^2 - 4y - 5 = 0, \end{cases}$$

公根是 $y=-1$ ，从而 $(0, -1)$ 为原方程组的一个解。

同法求得另外三个解 $(1, 2)$ ， $(2, 3)$ 与 $(-2, 1)$ 。原方程组共有四个解。

II 证明题

一 线性相关、线性无关

证明的方法一般有两种：1)根据定义直接证明，由一线性组合出发，推出系数应具有的性质；2)反证法，由于线性相关与线性无关是两个互相排斥的概念，所以反证法具有基本的重要性。

例 1 证明：若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$ 中， $\alpha_1 \neq 0$ ，且每一个 $\alpha_i (i=2, 3, \dots, m)$ 均不能由它前面的 $i-1$ 个向量线性表出，则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 1 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0$ 。因为 α_m 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表出，所以必有 $k_m \neq 0$ 。从而 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} = 0$ 。又因为 α_{m-1} 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-2}$ 线性表出，所以必有 $k_{m-1} \neq 0$ 。如此下去，同理可得 $k_{m-2} = k_{m-3} = \dots = k_3 = k_2 = 0$ ，从而 $k_1\alpha_1 = 0$ 。因为 $\alpha_1 \neq 0$ ，所以 $k_1 = 0$ 。因此， $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ ， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 2 用反证法。设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关，则有一组不全为0的数 k_1, k_2, \dots, k_m ，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ 。从 k_m 开始向前考察系数，设 k_i 是第一个不为0的数，则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_i\alpha_i = 0$ 。且必有 $i > 1$ ，否则， $k_1\alpha_1 = 0$ ，得出 $\alpha_1 = 0$ ，与已知条件矛盾。因为 $i > 1$ 且 $k_i \neq 0$ ，所以 α_i 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性表出，从而与题设矛盾。因此， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

二 极大无关组、向量组的秩

证明向量组的一个部分组构成极大无关组，基本的方法就是根据极大无关组的定义证明。

证明向量组的秩一般考虑其极大无关组。

例 2 证明：若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩是 $r, r > 0$ ，则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 r 个线性无关的向量均构成它的一个极大无关组。

证明 设 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的任意 r 个线性无关的向量。因为， $\alpha_i, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 可由一个极大无关组线性表出，而由秩是 r 知，极大无关组含有 r 个向量，所以， $\alpha_i, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性相关， $i=1, 2, \dots, s$ 。因此，

$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是一个极大无关组.

例 3 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r , 在其中任取 m 个向量构成部分组 A , 证明 A 的秩 $\geq r + m - s$.

证明 当 $r=0$ 时, 显然成立. 当 $r>0$ 时, 取 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大无关组 B , 则 B 之外剩下 $s-r$ 个向量, 从而 A 中至少有 $m-(s-r)$ 个向量取自 B , 它们线性无关, 因此, A 的秩 $\geq r + m - s$.

三 向量组等价

证明两个向量组等价, 按照定义, 就是要证明它们可以互相线性表出. 由于一个向量组与其任一极大无关组等价, 所以证明两个向量组等价可以转化为证明它们的极大无关组等价, 从而可能使问题得以简化.

例 4 已知两个向量组有相同的秩, 且其中一个可以被另一个线性表出, 证明: 这两个向量组等价.

证明 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ (I) 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ (II) 的秩均为 r . 当 $r=0$ 时, 显然成立. 当 $r>0$ 时, 取 (I) 的一个极大无关组 (III), 取 (II) 的一个极大无关组 (IV). 由于向量组与其极大无关组等价, 所以要证 (I) 与 (II) 等价, 只要证明 (III) 与 (IV) 等价. 设 (II) 可由 (I) 线性表出, 则 (IV) 可由 (III) 线性表出, 从而, 只要证明 (III) 可由 (IV) 线性表出. 用反证法, 设 (III) 中有一向量 α_i 不能由 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$ (IV) 线性表出, 则 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}, \alpha_i$ 线性无关. 但是, $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}, \alpha_i$ 可由 (III) 线性表出, 而 $r+1>r$, 所以 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}, \alpha_i$ 线性相关, 引出矛盾. 因此, (III) 可由 (IV) 线性表出.

四 矩阵的秩

证明矩阵的秩的方法是: 1) 通过初等变换化得容易确定其秩的矩阵; 2) 通过子式; 3) 通过行 (列) 向量组.

例 5 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, $B=(b_{ij})_{p \times q}$ 的秩分别为 s 和 t , 证明

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{的秩为 } s+t.$$

证明 1 对C进行初等变换, 可化为

$$C \rightarrow \begin{pmatrix} E_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E_{s+r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C_1$$

由于初等变换不改变矩阵的秩, 所以秩(C) = 秩(C₁) = s+t.

证明 2 当A, B中至少有一个为零矩阵时, 显然成立. 当A, B均不为零矩阵时, A, B分别有s阶子式D_s ≠ 0与t阶子式D_t ≠ 0, 而A的s+1阶与B的t+1阶子式均为0.

$$D_s = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_s j_1} & \cdots & a_{i_s j_s} \end{vmatrix}, \quad D_t = \begin{vmatrix} b_{k_1 l_1} & \cdots & b_{k_1 l_t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k_t l_1} & \cdots & b_{k_t l_t} \end{vmatrix}.$$

由拉普拉斯定理知, C有s+t阶子式

$$D_{s+t} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_s} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_s j_1} & \cdots & a_{i_s j_s} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{k_1 l_1} & \cdots & b_{k_1 l_t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{k_t l_1} & \cdots & b_{k_t l_t} \end{vmatrix} = D_s D_t \neq 0.$$

把C的第i行记为α_i, 则C的所有行向量都可以由α_{i₁}, ..., α_{i_s}, α_{k₁}, ..., α_{k_t}线性表出, 从而C的任意s+t+1阶子式均为0, 因此, C的秩是s+t.

证明 3 当A, B中至少有一个为零矩阵时, 显然成立. 当A, B均不为零矩阵时, 设 $\tilde{\alpha}_{i_1}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_s}$ 为A的行向量组的一个极大无关组, $\tilde{\alpha}_{k_1}, \dots, \tilde{\alpha}_{k_t}$ 为B的行向量组的一个极大无关组, i₁, ..., i_s, k₁, ..., k_t分别为它们所在C中的行数, C的行向量记为

$\alpha_i, i=1, 2, \dots, m+p$, 则易证 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}, \alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_t}$ 为 C 的行向量组的一个极大无关组. 因此, C 的秩为 $s+t$.

五 线性方程组的相容性

此类题目一般根据相容性定理进行证明.

例 6 设线性方程组

[illegible]

的系数矩阵 A 的秩等于矩阵

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

的秩, 证明: 该方程组有解.

证明 由矩阵的秩的定义知, $\text{秩}(\Lambda) \leq \text{秩}(\bar{A}) \leq \text{秩}(C)$, \bar{A} 是增广矩阵. 但是, 由已知条件得, $\text{秩}(\Lambda) = \text{秩}(C)$, 所以, $\text{秩}(\Lambda) = \text{秩}(\bar{A})$, 方程组有解.

六 齐次线性方程组的基础解系

此类题目根据齐次线性方程组的基础解系的定义及有关的定理进行证明.

例 7 设齐次线性方程组

[illegible]

的系数行列式 $D=0$ ，而 D 中 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} \neq 0$ ，证明：

它的全部解为 $(kA_{i1}, \dots, kA_{ij}, \dots, kA_{in})$, k 为 \mathbb{F} 中的任意数.

证明 因为 $D=0$, 所以, 根据行列式的展开定理知, $(A_{i1}, \dots, A_{ij}, \dots, A_{in})$ 为方程组的一个解. 因为 $D=0$ 而 $A_{ij} \neq 0$, 所以, 系数矩阵 A 的秩是 $n-1$, 从而基础解系由一个非零解构成. 因此, $(A_{i1}, \dots, A_{ij}, \dots, A_{in})$ 是一个基础解系, 其全部解是 $(kA_{i1}, \dots, kA_{ij}, \dots, kA_{in})$, k 是 \mathbb{F} 中的任意数.

§5 补充资料

I 非齐次线性方程组的基础解系

定义. 线性方程组的解向量集合中, 若有 k 个解向量具有性质: 1) 这 k 个解向量线性无关; 2) 方程组的任意解可由这 k 个解线性表出, 则称这 k 个解向量是线性方程组的一个基础解系.

定理. 含 n 个未知量的非齐次线性方程组, 当其系数矩阵与增广矩阵有相等的秩 $r < n$ 时, 必有基础解系; 每个基础解系包含 $n-r+1$ 个解向量; 且它有无穷多个基础解系, 而它的 k 个线性无关解向量为基础解系的必要充分条件是 $k=n-r+1$. 又, 它的全部解可以由一个基础解系的一切线性组合使组合系数之和等于 1 时而得到.

II 线性方程组的近似解法

一 简单迭代法

步骤. 1) 将方程组中的未知量 x_1, x_2, \dots, x_n 表成 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性式; 2) 以任意一组初始值 $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ 代入线性式中, 得到一组值 $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$; 3) 将每次得到的一组新值再代入线性式中得到另一组新值, 重复这种过程, 得到一组序列 $\{x_1^{(k)}\}, \{x_2^{(k)}\}, \dots, \{x_n^{(k)}\}$; 4) 当 k 变得很大时, 若这组序列的项值变得比较稳定, 则可取一组值 $x_1^{(k_0)}, x_2^{(k_0)}, \dots, x_n^{(k_0)}$ 作为原方程组的解的近似值.

二 逐个迭代法

步骤. 1) 从原方程组用 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性式表示出 x_1, x_2, \dots, x_n ; 2) 以任意一组初始近似值 $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ 代入 x_1 的表达式中, 得到 $x_1^{(1)}$, 再以 $x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ 代入 x_2 的表达式中, 得到 $x_2^{(1)}, \dots$, 以 $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{n-1}^{(1)}, x_n^{(0)}$ 代入 x_n 的表达式中, 得到 $x_n^{(1)}$, 从而, 得到一次近似 $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$; 3) 重复2)的过程, 得到 k 次近似 $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$, 从而建立迭代格式; 4) 当 k 很大时, 若 $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ 的每一项变化趋于稳定, 则可求得原方程组的近似解.

II 主元素消去法

一 总体选主元素的消去法

从线性方程组的所有系数中, 取绝对值最大的系数, 将具有这个系数的未知量作为消去元. 每一次都这样做. 这种消元法称为主元素消去法, 每次所取的绝对值最大的系数称为主元素.

步骤. 1) 观察方程组, 取含绝对值最大的系数为 r 的未知量作为消去元; 2) 由主元素 r 所在方程消去其它方程中对应的未知量, 即, 以 $\frac{c}{r}$ 乘以这个方程后加到另一个方程上, c 由另一个方程决定; 3) 将所得的新方程组继续采取以上方法, 直到所得到的是一个仅含一个未知量的方程; 4) 由仅含一个未知量的方程解出这个未知量, 再逐次代入主元素所在方程, 从而得到方程组的解.

二 按列选主元素的方法

步骤. 1) 从方程组中选取 x_1 的绝对值最大的系数作为主元素进行消元, 去掉主元素所在的方程, 得到关于 x_2, x_3, \dots, x_n 的新方程组; 2) 从这些新方程中选取 x_2 的绝对值最大的系数作为主元素进行消元, 去掉主元素所在方程, 得到关于 x_3, \dots, x_n 的新方程组; 3) 对每次得到的新方程组重复以上步骤, 直至得到得到一个仅含 x_n 的方程为止; 4) 从最后这个仅含 x_n 的方程中

解出 x_n ，再逐个代入主元素所在方程，得到方程组的解。

IV 历史资料点滴

我国古代数学著作《九章算术》中的第八章“方程”，主要是讲多元线性方程组应用问题的解法。这里的“方程”和现在的方程式完全不同，不是指的含有未知数的等式，而是指的用数字排成的相当于矩阵的长方形阵。求解就在由系数和常数项排成的“方程”上进行。其解法称为“直除”，较为繁琐，相当于现在的初等变换。三国时的数学家刘徽，改进“直除”法，将对应项系数互乘，对减一次即可消去一项，但对后人影响不大。宋、元时的数学家秦九韶于1247年完成《数书九章》一书，彻底改进连续相减的“直除”法，一直采用“互乘相消法”，相当于增广矩阵的初等变换，把秦九韶的式子稍加改变，加上矩阵的符号，就与现代的完全一样。

线性方程组的研究在西方是莱布尼兹于1678年以前开创的。后来，伴随着行列式与矩阵的产生逐步发展并完善。而矩阵秩的概念则要迟到十九世纪才由弗罗宾纽斯提出。

§6 基本习题

1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= -1. \end{cases}$$

2 解线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

3 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系.

4 求 $\alpha_1 = (6, 4, 1, -1, 2)$, $\alpha_2 = (1, 0, 2, 3, -4)$, $\alpha_3 = (1, 4, -9, -16, 22)$, $\alpha_4 = (7, 1, 0, -1, 3)$ 的一个极大无关组.

5 解方程组

$$\begin{cases} 5y^2 - 6xy + 5x^2 - 16 = 0 \\ y^2 - xy + 2x^2 - y - 5x = 0. \end{cases}$$

6 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s > 1$) 线性相关的必要充分条件是至少有一个向量可以由其余的向量线性表出.

7 证明: 若有一向量 α 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出且表法唯一, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

8 设三个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 的秩分别为 r_1, r_2, r , 证明: $\max(r_1, r_2) \leq r \leq r_1 + r_2$.

9 证明: 线性方程组 $x_1 - x_2 = a_1, x_2 - x_3 = a_2, x_3 - x_4 = a_3, x_4 - x_5 = a_4, x_5 - x_1 = a_5$ 有解的必要充分条件是 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$.

10 证明: 若 n 个未知量的齐次线性方程组的系数矩阵的秩 $r < n$, 则它的任意 $n - r$ 个线性无关的解向量均构成它的一个基础解系.

第四章 矩 阵

§1 概括说明

矩阵这一概念是从线性方程组和其它许多事物中抽象出来的。矩阵是一种有力的工具，也是一种重要的研究对象，贯穿于线性代数的各个部分，处于中心的地位。矩阵的计算和理论，不仅在代数学自身有广泛的应用（如线性方程组的求解、线性变换的讨论、群的研究等），而且在数学的其它学科、在物理学及其它科学技术领域、在经济及其它社会科学领域都有广泛的应用。矩阵的运算是矩阵理论研究的基础，本章主要讨论运算及有关的问题，内容比较具体，但计算较多，并且必须熟练掌握。

本章的内容分为八个部分：矩阵及其运算，矩阵的分块，初等矩阵，可逆矩阵，矩阵的等价，几类特殊矩阵，分块乘法的初等变换，广义逆矩阵。

矩阵的运算有加法、数乘、乘法、转置四种，其中，乘法最为重要，也较为复杂，而且乘法不满足交换律，这种情况也是第一次出现。

矩阵的分块是将阶数大的矩阵转化为阶数小的矩阵，而且在分块的基础上再进行运算，将小块矩阵作为通常的元素看待。这种思想方法是重要的。

初等矩阵是由单位矩阵经过一次初等变换而产生的矩阵，它的作用主要是：把对矩阵进行行（列）的初等变换转化为这个矩阵左（右）乘一个相应的初等矩阵。

可逆矩阵是一类重要的矩阵，其根本作用在于，就一定意义上来说，可逆矩阵给出矩阵的除法运算。

矩阵的等价是由初等变换引出的。等价具有反身性、对称

性、传递性，从而对矩阵进行分类，建立矩阵标准形的概念，进而，矩阵在等价意义下化为最简形式，由矩阵的秩唯一决定。

几类特殊矩阵包括：基底矩阵；对角矩阵，准对角矩阵；三角矩阵；对称矩阵，反对称矩阵；幂等矩阵，幂零矩阵，么幂矩阵。

分块乘法的初等变换，就是将分块乘法与初等变换相结合，从而成为矩阵运算中极端重要的手段。

广义逆矩阵是一种新的数学工具，在代数、数理统计、计算方法、微分方程、泛函分析、物理学、测量学等方面有着广泛的应用。

本章的补充资料是：置换矩阵，行列式降阶算法，矩阵的直积，复合矩阵，Moore-Penrose逆与Drazin逆，高矩阵，矩阵分析，历史资料点滴。

§2 内容提要

I 矩阵及其运算

一 矩阵的概念

数域 F 上的 $s \times n$ 个数排成的 s 行 n 列的矩形数表，称为 F 上的一个 $s \times n$ 矩阵。记为 $A_{s \times n}$ ，或 $A_{s,n}$ ，简记为 A ，也记为 $(a_{ij})_{s \times n}$ ，或 $(a_{ij})_{s,n}$ ，或 (a_{ij}) 。即

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}.$$

其中组成矩阵 A 的数称为 A 的元素，而 A 的第 i 行第 j 列交叉处的元素，称为 A 的 (i, j) 元素。

$n \times n$ 矩阵称为 n 阶矩阵。数域 F 上的所有 n 阶矩阵作成的集合，记为 $M_n(F)$ 。

若矩阵 A 与 B 的行数相同，列数相同，且任意 (i, j) 元素均对应相等，则称 A 与 B 相等，记为 $A = B$ 。

二 矩阵的加法

设有两个行数相同、列数也相同的矩阵 $A=(a_{ij})_{s,n}$, $B=(b_{ij})_{s,n}$, 则称矩阵 $(a_{ij}+b_{ij})_{s,n}$ 为 A 与 B 的和, 记为 $A+B$. 简言之, 矩阵相加, 即对应元素相加.

元素全为数 0 的矩阵称为零矩阵, 记为 $0_{s,n}$, 在不致引起混淆的情况下, 简记为 0.

$(-a_{ij})_{s,n}$ 称为 $A=(a_{ij})_{s,n}$ 的负矩阵, 记为 $-A$. 从而, 将矩阵的减法定义为: $A-B=A+(-B)$.

矩阵的加法具有性质: 1) $(A+B)+C=A+(B+C)$; 2) $A+B=B+A$; 3) $A+0=A$; 4) $A+(-A)=0$.

关于秩, 有: $\text{秩}(A+B) \leq \text{秩}(A) + \text{秩}(B)$.

三 数量乘法

对于数域 F 中的数 k , F 上的矩阵 $A=(a_{ij})_{s,n}$, 可以作数量乘法: $kA=(ka_{ij})_{s,n}$, kA 称为 k 与 A 的数量乘积.

矩阵的数量乘法具有性质: 1) $(k+l)A=kA+lA$; 2) $k(A+B)=kA+kB$; 3) $k(lA)=(kl)A$; 4) $1A=A$; 5) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$; 6) $k0=0$, $0A=0$.

关于秩, 有: 当 $k \neq 0$ 时, $\text{秩}(kA)=\text{秩}(A)$; 当 $k=0$ 时, $\text{秩}(kA)=0$.

四 矩阵的乘法

设有数域 F 上的矩阵 A, B . 当 $A=(a_{ik})_{s,n}$ 的列数等于 $B=(b_{kj})_{n,m}$ 的行数时, 可以作乘法: $AB=(a_{ik})_{s,n}(b_{kj})_{n,m}=(c_{ij})_{s,m}$, $c_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, $i=1,2,\dots,s$, $j=1,2,\dots,m$, AB 称为 A 与 B 的积.

设有一个 n 阶矩阵, 若它的 $(1,1), (2,2), \dots, (n,n)$ 元素均为 1, 而其余元素均为零, 则称该矩阵为 n 阶单位矩阵, 记为 E_n , 简记为 E .

矩阵的乘法具有性质: 1) $(AB)C = A(BC)$; 2) $A(B+C) = AB+AC$, $(B+C)A = BA+CA$; 3) $E_s A_{s \times n} = A_{s \times n}$, $A_{s \times n} E_n = A_{s \times n}$; 4) $0C = 0$, $A0 = 0$.

$AB \neq BA$, 原因在于: 1) AB 有意义, BA 未必有意义; 2) 即使 AB 与 BA 均有意义, 但二者行数与列数未必一致 (AB 与 BA 均有意义, 且阶数相同 $\Leftrightarrow A$ 与 B 为同阶矩阵); 3) 即使 AB 与 BA 均有意义, 而且它们的阶数也相同, 仍然未必相等. 因此, 矩阵乘法的交换问题, 是一个复杂的问题.

由 $AB = 0$ 不能推出 $A = 0$ 或 $B = 0$, 从而, 由 $AB = AC$ 且 $A \neq 0$ 不能推出 $B = C$. 因此, 矩阵乘法消去律的问题, 也是一个复杂的问题.

对于 n 阶矩阵 A 与 B , 乘积 AB 的行列式具有性质:

$$|AB| = |A||B|.$$

关于秩, 有: $\text{秩}(AB) \leq \min(\text{秩}(A), \text{秩}(B))$.

五 矩阵多项式

由于矩阵的乘法满足结合律, 所以多个矩阵的乘积有意义. 从而, n 阶矩阵 A 的正整数次方幂定义为: $A^1 = A$, $A^{k+1} = A^k A$, 换言之, A^k 就是 k 个 A 相乘.

方幂具有性质: 对任意正整数 k, l , 成立 $A^k A^l = A^{k+l}$, $(A^k)^l = A^{kl}$, 但 $(AB)^k \neq A^k B^k$; 当 $AB = BA$ 时, 成立 $(AB)^k = A^k B^k$, $A^k B^l = B^l A^k$, $(A+B)^k = A^k + c_k^1 A^{k-1} B + c_k^2 A^{k-2} B^2 + \cdots + c_k^{k-1} A B^{k-1} + B^k$.

若 $f(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 \in \mathbf{F}(\lambda)$, A 为 n 阶矩阵, 则 $f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$ 称为矩阵 A 的多项式.

若 $f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda), p(\lambda) \in \mathbf{F}(\lambda)$, 则成立: 1) $h(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda) \Rightarrow h(A) = f(A) + g(A)$; 2) $p(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda) \Rightarrow p(A) = f(A)g(A)$; 3) $f(A)g(A) = g(A)f(A)$; 4) $AB = BA \Rightarrow$

$$Bf(A)=f(A)B; 5) AB=BA \Rightarrow f(A)g(B)=g(B)f(A).$$

六 转置

若 $A=(a_{ij})_{n \times s}$, 则 $A'=(a_{ji})_{s \times n}$ 称为 A 的转置.

转置具有性质: 1) $(A')'=A$; 2) $(A+B)'=A'+B'$;

3) $(AB)'=B'A'$; 4) $(kA)'=kA'$; 5) $|A'|=|A|$.

关于秩, 有: 秩 $(A') = \text{秩}(A)$.

II 矩阵的分块

矩阵的分块是一个在处理阶数较高的矩阵时常用的方法. 把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的, 如同矩阵是由数组成的, 把这些小矩阵当作数一样来处理, 从而进行运算.

用分块矩阵来作矩阵加法时, 必须将两个矩阵用同样的分法来分成相应的小块. 设 A 与 B 都是 $s \times n$ 矩阵, 把 A 与 B 进行如下分块

$$A = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \\ A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tl} \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{matrix}; \quad B = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \\ B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1l} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tl} \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{matrix};$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 都是 $s_i \times n_j$ 矩阵; $s_1 + s_2 + \cdots + s_t = s$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_l = n$, 则

$$A+B = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1l}+B_{1l} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2l}+B_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1}+B_{t1} & A_{t2}+B_{t2} & \cdots & A_{tl}+B_{tl} \end{pmatrix}.$$

用分块矩阵来作乘法时, 第一个矩阵的列的分法必须与第二个矩阵的行的分法相一致. 设 A 是一个 $s \times n$ 矩阵, B 是一个 $n \times m$ 矩阵, 把 A 与 B 进行如下分块:

$$A = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \\ A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tl} \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{matrix}; \quad B = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \\ B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{lr} \end{pmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{matrix};$$

$$\begin{pmatrix} s_1 + s_2 + \cdots + s_i = s \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_i = n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} n_1 + n_2 + \cdots + n_i = n \\ m_1 + m_2 + \cdots + m_r = m \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 是 $s_i \times n_j$ 矩阵, B_{ij} 是 $n_i \times m_j$ 矩阵, 则

$$AB = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \\ C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{t1} & C_{t2} & \cdots & C_{tr} \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{matrix},$$

$$\text{其中, } C_{pq} = A_{p1}B_{1q} + A_{p2}B_{2q} + \cdots + A_{pt}B_{tq} = \sum_{k=1}^t A_{pk}B_{kq},$$

$$p=1, 2, \cdots, t, \quad q=1, 2, \cdots, r.$$

II 初等矩阵

由单位矩阵经过一次初等变换而得到的矩阵称为初等矩阵。

初等矩阵有三种, 且仅有三种: 1) 把单位矩阵 E 的第 i 行 (列) 与第 j 行 (列) 互换, 得到的初等矩阵记为 $P(i, j)$, 称为换法矩阵; 2) 用数域 F 中的非零数 c 乘 E 的第 i 行 (列), 得到的初等矩阵记为 $P(i(c))$, 称为倍法矩阵; 3) 把 E 的第 j 行 (i 列) 的 k 倍加到第 i 行 (j 列) 上, 得到的初等矩阵记为 $P(i, j(k))$, 称为消法矩阵。换法矩阵可以写为倍法矩阵与消法矩阵的乘积。

设 A 是一个 $s \times n$ 矩阵。对 A 施行一次初等行变换, 就相当于在 A 的左边乘上一个相应的 s 阶初等矩阵; 对 A 施行一次初等列变换, 就相当于在 A 的右边乘上一个相应的 n 阶初等矩阵。

IV 可逆矩阵

一 定义

设 A 是一个 n 阶矩阵。若有矩阵 B , 使 $AB = BA = E$, 则称 A 为可逆矩阵, 称 B 是 A 的逆矩阵。

若 n 阶矩阵 A 的行列式不等于零, 则称 A 为非退化的 (非奇异的、满秩的); 否则, 称为退化的 (奇异的、降秩的)。

设 A 是一个 n 阶矩阵: $A = (a_{ij})$, $A_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 是行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 则矩阵 $A^* = (A_{ji})$ 称为 A 的伴随矩阵. $AA^* = A^*A = |A|E$.

二 性质

可逆矩阵具有性质: 1) 若 A 可逆, 则 A 的逆矩阵唯一, 记为 A^{-1} ; 2) $(A^{-1})^{-1} = A$; 3) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$; 4) 若 A 可逆, 则 $|A| \neq 0$, 且 $A^{-1} = |A|^{-1}A^*$; 5) 若 A 可逆, 则 A 的转置矩阵 A' 也可逆, 而且 $(A')^{-1} = (A^{-1})'$; 6) 若 A 与 B 都可逆, 则 AB 也可逆, 而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 7) 若 A 是一个 $s \times n$ 矩阵, P 是一个 s 阶可逆矩阵, Q 是一个 n 阶可逆矩阵, 则 $\text{秩}(A) = \text{秩}(PA) = \text{秩}(AQ) = \text{秩}(PAQ)$; 8) 若 $AB = AC$, 且 A 可逆, 则 $B = C$; 9) 若 A 可逆, 则由 $AX = B$ 得 $X = A^{-1}B$, 由 $YA = B$ 得 $Y = BA^{-1}$, 可分别看作左除与右除.

三 判定

对于 n 阶矩阵 A , 下列条件等价: 1) 存在矩阵 B , 使 $AB = BA = E$; 2) $|A| \neq 0$; 3) 存在 n 阶矩阵 B , 使 $AB = E$; 4) 存在 n 阶矩阵 B , 使 $BA = E$; 5) $\text{秩}(A) = n$; 6) A 是初等矩阵的乘积; 7) A 可以经初等变换化为单位矩阵 E ; 8) 对于任意矩阵 B , 有 $\text{秩}(AB) = \text{秩}(B)$.

四 求法

公式法: $A^{-1} = |A|^{-1}A^*$.

初等变换法: $(AE) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (EA^{-1});$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} A & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行、列变换}} \begin{pmatrix} E & C \\ B & 0 \end{pmatrix}, A^{-1} = BC.$$

初等矩阵的逆矩阵: $P(i, j)^{-1} = P(i, j)$, $P(i(c))^{-1} = P(i(c^{-1}))$, $P(i, j(k))^{-1} = P(i, j(-k))$.

V 矩阵的等价

若矩阵B可以由矩阵A经过一系列初等变换而得到, 就称A与B等价, 记为 $A \cong B$.

矩阵的等价具有性质: 1) 反身性: $A \cong A$; 2) 对称性: 若 $A \cong B$, 则 $B \cong A$; 3) 传递性: 若 $A \cong B$, $B \cong C$, 则 $A \cong C$.

设A是一个秩为 r 的矩阵, 则A等价于下面的矩阵: $(1,1), (2,2), \dots, (r,r)$ 元素是1, 其余元素均为0. 称为A的等价标准形.

设矩阵A与B都是 $s \times n$ 矩阵, 则下列条件等价: 1) A与B等价; 2) 存在初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_s, Q_1, Q_2, \dots, Q_t$, 使得 $B = P_1 P_2 \dots P_s A Q_1 Q_2 \dots Q_t$; 3) 存在可逆矩阵P与Q, 使得 $B = P A Q$; 4) A与B的等价标准形相同; 5) A与B的秩相同.

互相等价的矩阵分为一个类, 即组成一个集合, 称为矩阵的等价类. 全体 n 阶矩阵分为 $n+1$ 个互不相同的等价类.

对于任意矩阵A, 存在可逆矩阵P与Q, 使 $P A Q$ 成为A的等价标准形.

VI 几类特殊的矩阵

一 基底矩阵

设 E_{ij} 是一个 $s \times n$ 矩阵, 并且, 除 (i,j) 元素为1外, 其余元素均为0, 则称 $E_{ij} (i=1, 2, \dots, s, j=1, 2, \dots, n)$ 是一组基底矩阵.

对于任意矩阵 $A = (a_{ij})_{s \times n}$, 有
$$A = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}.$$

二 数量矩阵

矩阵 kE 称为数量矩阵.

数量矩阵具有性质: 1) $(kE_s) A_{s \times n} = A_{s \times n} (kE_n) = kA_{s \times n}$; 2) 数量矩阵与任意同阶矩阵作乘法都可交换; 3) $kE + lE = (k+l)E$, $(kE)(lE) = (kl)E$; 4) kE 可逆 $\Leftrightarrow k \neq 0$, 而且当 $k \neq 0$ 时, $(kE)^{-1} = k^{-1}E$.

三 对角矩阵、准对角矩阵

主对角线以外的其余元素全为零的 n 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

称为对角矩阵, 简记为 (a_1, a_2, \cdots, a_n) .

对角矩阵有如下运算性质:

- 1) $(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n)$
 $= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n);$
- 2) $(a_1, a_2, \cdots, a_n)(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_n b_n);$
- 3) $k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n);$
- 4) (a_1, a_2, \cdots, a_n) 可逆 $\Leftrightarrow a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$. 当 (a_1, a_2, \cdots, a_n) 可逆时, 有 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1}, \cdots, a_n^{-1})$.

形如
$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

的分块矩阵, 其中 $A_i (i=1, 2, \cdots, s)$ 为 n_i 阶矩阵, 称为准对角矩阵, 简记为 (A_1, A_2, \cdots, A_s) .

准对角矩阵有如下运算性质: 分法相同的准对角矩阵可以相加与相乘, 其结果仍是准对角矩阵. 即

- 1) $(A_1, A_2, \cdots, A_s) + (B_1, B_2, \cdots, B_s)$
 $= (A_1 + B_1, A_2 + B_2, \cdots, A_s + B_s);$
- 2) $(A_1, A_2, \cdots, A_s)(B_1, B_2, \cdots, B_s)$
 $= (A_1 B_1, A_2 B_2, \cdots, A_s B_s);$
- 3) $k(A_1, A_2, \cdots, A_s) = (kA_1, kA_2, \cdots, kA_s);$
- 4) (A_1, A_2, \cdots, A_s) 可逆 \Leftrightarrow 每个 $A_i (i=1, 2, \cdots, s)$ 都可逆. 当 (A_1, A_2, \cdots, A_s) 可逆时, 有 $(A_1, A_2, \cdots, A_s)^{-1} = (A_1^{-1},$

$A_2^{-1}, \dots, A_n^{-1}\}.$

四 上(下)三角矩阵

主对角线以下(上)的元素全等于零的 n 阶矩阵称为上(下)三角矩阵.

上(下)三角矩阵有如下运算性质:

$$1) \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & & & \\ & a_{22}+b_{22} & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix};$$

$$2) \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix};$$

$$3) k \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & & & \\ & ka_{22} & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & ka_{nn} \end{pmatrix};$$

4) 上(下)三角矩阵可逆的必要充分条件是: 它的主对角线上的元素全不为零. 上(下)三角矩阵的逆矩阵仍为上(下)三角矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & & \\ & a_{22}^{-1} & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix},$$

其中, 不同矩阵里的*所表示的元素未必相同.

五 对称矩阵、反对称矩阵

若 $A = A'$ ，则称 A 为对称矩阵。对称矩阵的和，以及数与对称矩阵的乘积仍是对称矩阵。两个对称矩阵的积是对称矩阵当且仅当它们对乘法可交换。若对称矩阵可逆，则其逆矩阵仍是对称矩阵。

若 $A = -A'$ ，则称 A 为反对称矩阵。反对称矩阵的和，以及数与反对称矩阵的乘积仍是反对称矩阵。奇数阶的反对称矩阵一定都是退化的。

任意 n 阶矩阵 A 都可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

六 幂等矩阵、幂零矩阵、么幂矩阵

若 $A^2 = A$ ，则称 A 为幂等矩阵。

若有正整数 k ，使 $A^k = 0$ ，则称 A 为幂零矩阵。

若有正整数 k ，使 $A^k = E$ ，则称 A 为么幂矩阵。特别地，当 $A^2 = E$ 时，称 A 为对合矩阵。

幂等矩阵除单位矩阵外都是退化的；幂零矩阵都是退化的；么幂矩阵都是非退化的。

VII 分块乘法的初等变换

将某个单位矩阵如下进行分块：

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}.$$

对它进行两行（列）对换；某一行（列）左乘（右乘）一个矩阵 P ；一行（列）加上另一行（列）的 P （矩阵）倍数，就可得到如下类型的一些矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_m & P \\ 0 & E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ P & E_n \end{pmatrix}.$$

和初等矩阵与初等变换的关系一样，用这些矩阵左乘任一个分块矩阵，只要分块乘法能够进行，其结果就是对它进行相应的

变换:

$$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ P & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ PA+C & PB+D \end{pmatrix}.$$

同样地,用它们右乘任一矩阵,进行分块乘法时也有相应的结果,此处从略.

VIII 广义逆矩阵

设 A 为 $m \times n$ 矩阵. 某个 $n \times m$ 矩阵 G , 对任意 n 维列向量 X_0 及 $b = AX_0$, 满足 $AGb = b$ 的必要充分条件是 $AGA = A$.

设 A 为 $m \times n$ 矩阵. 若 $n \times m$ 矩阵 G 满足 $AGA = A$, 则称 G 为 A 的一个广义逆矩阵, 简称广义逆.

若 G 是 A 的一个广义逆, 则 $AX = b$ 有解当且仅当 $AGb = b$.

当 A 是 $n \times n$ 可逆矩阵时, A 的广义逆 G 即为 A 的逆, 即 $G = A^{-1}$, 从而广义逆是逆的推广.

设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r , 且设

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q,$$

其中 P, Q 分别为 $m \times m, n \times n$ 可逆矩阵, 则 A 的全部广义逆为

$$G = Q^{-1} \begin{pmatrix} E_r & C \\ D & F \end{pmatrix} P^{-1},$$

其中 C, D, F 分别为任意的 $r \times (m-r), (n-r) \times r, (n-r) \times (m-r)$ 矩阵.

$m \times n$ 矩阵 A 的广义逆 G 唯一 $\Leftrightarrow m = n$ 且 A 是可逆矩阵.

设 G 为 $m \times n$ 矩阵 A 的任一广义逆, 则, 1) 秩 $(G) \geq$ 秩 (A) ; 2) $s = \min(m, n)$, 秩 $(A) = r$, 则对于 r 与 s 间的任意整数 t , 存在 A 的一个广义逆 G_0 , 使秩 $(G_0) = t$; 3) 秩 $(A) =$ 秩 $(AG) =$ 秩 (GA) .

设 $AX=b$ 有解, 且 $b \neq 0$, 则它的解的一般形式为 Gb , 其中 G 为 A 的任意一个广义逆.

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, G 为任意给定的 A 的广义逆, 则齐次线性方程组 $AX=0$ 的全部解为 $(E_n - GA)Z$, 其中 Z 取遍任意 n 维列向量.

设 G 是 A 的一个广义逆, $AX=b$ 有解, 则其全部解为 $Gb + (E_n - GA)Z$.

§3 重点难点

本章的主题词是: $s \times n$ 矩阵, n 阶矩阵, 零矩阵, 负矩阵, 单位矩阵, 矩阵多项式, 转置矩阵; 分块矩阵; 初等变换, 初等矩阵, 换法矩阵, 倍法矩阵, 消法矩阵; 可逆矩阵, 非退化矩阵 (非奇异、满秩), 伴随矩阵; 矩阵的等价, 等价标准形; 基底矩阵, 数量矩阵, 对角矩阵, 准对角矩阵, 上 (下) 三角矩阵, 对称矩阵, 反对称矩阵, 幂等矩阵, 幂零矩阵, 么幂矩阵, 对合矩阵; 广义逆矩阵.

本章的基本方法是: 矩阵乘法, 分块乘法, 可逆矩阵判定方法, 逆矩阵公式求法, 逆矩阵初等变换求法, 矩阵的秩的证明方法, 等价标准形求法, 逆矩阵分块求法, 广义逆矩阵求法, 矩阵方程解法.

本章的重点是: 可逆矩阵, 初等矩阵, 矩阵的秩与矩阵的等价标准形.

可逆矩阵是最重要的一类矩阵, 在研究矩阵时经常用到. 求可逆矩阵的逆矩阵是一件基本的工作, 求逆矩阵的方法 (特别是初等变换法) 必须熟练掌握. 本章中, 对于矩阵的秩、矩阵等价问题的讨论, 可逆矩阵都有直接的意义. 以后的各章中, 对于矩阵合同、相似等问题的讨论, 可逆矩阵都是必不可少的. 实际上, 可逆矩阵贯穿于线性代数理论的始终. 因此, 可逆矩阵成为本章的一个重点.

初等变换在矩阵理论的研究中有重要作用，是一种基本方法与基本步骤。而初等矩阵则把矩阵的初等变换转化为矩阵左(右)乘一初等矩阵，从而，可逆矩阵表示为初等矩阵的乘积，两矩阵等价通过初等矩阵表示为等式。因此，初等矩阵成为本章的一个重点。

矩阵的秩是矩阵自身的最基本的属性，讨论一个矩阵首先讨论其秩，而后在秩的基础上再讨论其它问题。上一章已经建立了矩阵的秩的概念，并且借助于秩的概念彻底解决了线性方程组的问题。本章中，以讨论两个矩阵乘积的秩为主，并讨论了秩的其它一些问题，得到了许多关于秩的等式与不等式。本章中，还以秩为依据建立了等价标准形与等价类的概念，为讨论矩阵作了示范。因此，矩阵的秩与矩阵的等价标准形成为本章的一个重点。

本章的难点是：分块矩阵，初等矩阵，广义逆矩阵。

分块的想法不容易理解，分块的做法不容易掌握，尤其分块矩阵的乘法，则更为困难。因此，分块矩阵成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1) 用具体例子验证分块运算的规则，以熟悉并加深理解这些规则；2) 通过准对角形矩阵的运算来理解分块矩阵的运算及作用；3) 通过分块求逆矩阵来认识分块矩阵的重要意义；4) 将分块乘法与初等变换结合起来考虑。

初等矩阵既是本章的一个重点，又是本章的一个难点。 $P(i, j)$ 的形状不容易想象， $P(i, j(k))$ 左乘与右乘引起的初等变换不同步，可逆矩阵表示为初等矩阵的乘积时因子的顺序与实际步骤不同步，等等，都造成困难。因此，初等矩阵成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1) 通过理论推导及5阶初等矩阵的实例来熟悉初等矩阵的三种类型；2) 与分块矩阵相结合，详细推导左乘与右乘的规律，并用具体例子来验证。

广义逆矩阵的引入及其定义都比较难于理解，广义逆矩阵不具备唯一性，等等，因此，广义逆矩阵成为本章的一个难点，解

决困难的方法是: 1) 具体推导出广义逆矩阵是逆矩阵的一种推广; 2) 通过解线性方程组认识广义逆矩阵的意义及其引入的必然性; 3) 具体求出矩阵的广义逆矩阵.

§4 习题类解

I 计算题

一 求给定矩阵的和、差、积及混合运算

根据矩阵的和、差、积等的定义, 进行运算, 求得所要的结果.

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$,

求 AB , BA , A^2 , $A^2 - 5A + 2E$.

解 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -20 & -10 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A^2 - 5A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 20 & 12 \end{pmatrix},$$

例 2 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}, \text{ 求 } BA, AC.$$

解 $BA = \begin{pmatrix} b_1 a_{11} & b_1 a_{12} & b_1 a_{13} \\ b_2 a_{21} & b_2 a_{22} & b_2 a_{23} \end{pmatrix}$,

$$AC = \begin{pmatrix} a_{11}c_1 & a_{12}c_2 & a_{13}c_3 \\ a_{21}c_1 & a_{22}c_2 & a_{23}c_3 \end{pmatrix}.$$

说明 本例可以推广为: 以对角矩阵左乘 (右乘) 矩阵 A , 其积就是以对角矩阵的主对角线上的元素依次乘以 A 的各行 (列).

例 3 求 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

分析 先找出规律,再用数学归纳法证明.

$$\text{解1} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 用数学归纳法证明. 当 $n=1$ 时成立.

设 $n=k$ 时成立, 则 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解2} \quad \text{因为} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n + c_n^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ c_n^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

说明 本例可推广为

$$\left(\begin{array}{cccccc} \lambda & 1 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \cdots 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & \lambda & 0 \end{array} \right)_{mm}^n = \left(\begin{array}{cccccc} \lambda^n & c_n^1 \lambda^{n-1} & c_n^2 \lambda^{n-2} \cdots c_n^{m-1} \lambda^{n-m+1} & & & \\ 0 & \lambda^n & c_n^1 \lambda^{n-1} \cdots c_n^{m-2} \lambda^{n-m+2} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots c_n^1 \lambda^{n-1} & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^n & \end{array} \right)_{mm} \quad (n \geq m-1)$$

$$= \left(\begin{array}{cccccc} \lambda^n & c_n^1 \lambda^{n-1} & c_n^2 \lambda^{n-2} \cdots c_n^{n-1} \lambda & 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \lambda^n & c_n^1 \lambda^{n-1} \cdots c_n^{n-2} \lambda^2 & c_n^{n-1} & 1 & 0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 & 0 \cdots c_n^1 \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 & 0 \cdots \lambda^n \end{array} \right)_{mm} \quad (2 \leq n < m-1).$$

二 求与给定矩阵可交换的矩阵

求与给定矩阵A可交换的矩阵B, 将B的元素作为未知量, 由 $AB=BA$ 得到方程组, 而后求解方程组即可.

例 4 求与 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可交换的矩阵.

解 与A可交换的矩阵B一定是3阶矩阵.

$$\text{设 } B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix},$$

则由 $AB=BA$ 得: $x_1=x_5=x_9$, $x_3=x_4=x_8$, $x_2=x_6=x_7$,

所以 $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, 其中 a, b, c 为任意数.

三 求可逆矩阵的逆矩阵

当可逆矩阵A是具体的数字矩阵时, 按 § 2 中 IV, 四, 所述的方法去做. 当可逆矩阵是分块矩阵时, 可以将逆矩阵设为分法相同的分块矩阵, 而后求出各未知的块.

例 5 求可逆矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

的逆矩阵.

解 1 因为 $|A|=9$, 并且, $A_{11}=-2$, $A_{12}=6$, $A_{13}=1$, $A_{21}=4$, $A_{22}=-3$, $A_{23}=-2$, $A_{31}=1$, $A_{32}=-3$, $A_{33}=-5$, 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 6 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}.$$

$$\text{解 2} \quad (AE) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{[2+1(-3)], [3+1(1)]} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{[2(-\frac{1}{5})]} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{[1+2(-2)], [3+2(-2)]} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{[3(-\frac{5}{9})]} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{[1+3(-\frac{1}{5})], [2+3(\frac{3}{5})]} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{array} \right),$$

$$\text{所以} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}.$$

解 3

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{c} A \\ E \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & & & \\ 3 & 1 & 0 & & & \\ -1 & 0 & -2 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 1 & 0 & 0 & (2+1(-2)) & & \\ 0 & 1 & 0 & (3+1(1)) & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 3 & -5 & 3 & & & \\ -1 & 2 & -3 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \\
 &\xrightarrow{\left[2\left(-\frac{1}{5}\right)\right]} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 3 & 1 & 3 & & & \\ -1 & -\frac{2}{5} & -3 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 1 & \frac{2}{5} & 1 & (1+2(-3)) & & \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & (3+2(-3)) & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & & & \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \\
 &\xrightarrow{\left[3\left(-\frac{5}{9}\right)\right]} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{9} & \left[1+3\left(-\frac{1}{5}\right)\right] & & \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{3} & \left[2+3\left(\frac{2}{5}\right)\right] & & \\ 0 & 0 & -\frac{5}{9} & & & \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & & & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} & & & \end{array}\right) \\
 \text{所以 } A^{-1} &= \left(\begin{array}{ccc} -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{array}\right).
 \end{aligned}$$

解 4

$$\left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} \{3+1(1)\} \\ \{2+1(-3)\} \\ \{2+1(-2)\} \\ \{3+1(1)\} \end{array}} \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{[2(-\frac{1}{5})]} \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} \{3+2(-2)\} \\ [3+2(\frac{3}{5})] \end{array}} \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ \hline 1 & -2 & -\frac{1}{5} & & & \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{[3(-\frac{5}{9})]} \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{1}{5} & & & \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right\},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

说明 1) $\xrightarrow{[3(-4)]}$ 表示第 3 行乘以 -4 , $\xrightarrow{[3+2(-2)]}$ 表示第 2 行的 -2 倍加到第 3 行, $\xrightarrow{[1,2]}$ 表示交换第 1 行与第 2 行; 2) $\xrightarrow{[3(-2)]}$, $\xrightarrow{[3+1(1)]}$, $\xrightarrow{[1,2]}$ 表示相应的列变换; 3) $\xrightarrow{[3+1(2)]}$, $\xrightarrow{[3+(-1)]}$, 要先列变换, 再行变换.

例 6 设 $X = \begin{pmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{pmatrix}$, 且 A^{-1} , C^{-1} 存在, 求 X^{-1} .

解 设 $X^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$,

并且, X^{-1} 的分块可与 X 相乘, 则由 $X^{-1}X = E$ 得到

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{pmatrix} = E, \quad \begin{pmatrix} X_{12}C & X_{11}A \\ X_{22}C & X_{21}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

$X_{12}C = E_1$, $X_{11}A = 0$, $X_{22}C = 0$, $X_{21}A = E_2$, 所以, $X_{12} = C^{-1}$, $X_{11} = 0$, $X_{22} = 0$, $X_{21} = A^{-1}$, 并且容易验证, 成立 $X^{-1}X = E$, 因此

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

四 求矩阵的等价标准形

求 $m \times n$ 矩阵 A 的等价标准形 B , 可以如下变化

$$\left(\begin{array}{c} A : E_m \\ \dots\dots\dots \\ E_n : \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等变换}} \left(\begin{array}{c} B : P \\ \dots\dots\dots \\ Q : \end{array} \right)$$

则有 $PAQ = B$.

例 7 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

求可逆矩阵 P, Q , 使 PAQ 为 A 的等价标准形.

解 $\left(\begin{array}{c} A : E_5 \\ \dots\dots\dots \\ E_3 : \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \end{array} \right)$

$\begin{matrix} \{2+1(-2)\} \\ \{3+2(-1)+1(-1)\} \\ \{4+2(-1)+1(1)\} \\ \{5+2(-2)\} \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \end{array} \right)$

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow{\begin{array}{l} \{2+1(-2)\} \\ \{3+1(-3)\} \\ \{3+2(-\frac{4}{3})\} \\ \{2(-\frac{1}{3})\} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccccc}
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & & & & & \\
 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & & & & & \\
 0 & 0 & 1 & & & & &
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\text{所以 } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

五 解矩阵方程

若 A, B 是已知矩阵, X 是未知矩阵, 则 $AX=B, XA=B$ 称为矩阵方程。解矩阵方程的一般方法是: 将 X 的元素作为未知量, 根据矩阵乘法与矩阵相等的概念, 得到线性方程组, 解线性方程组即得到 X 。当 A 是可逆矩阵时, 由 $AX=B$ 得 $X=A^{-1}B$, 用初等变换得

$$(AB) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \ A^{-1}B), \text{ 即 } (E \ X);$$

由 $XA=B$ 得 $X=BA^{-1}$, 用初等变换得

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}, \text{ 即 } \begin{pmatrix} E \\ X \end{pmatrix}.$$

例 8 解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

解 1 由条件知, X 必为 2 阶矩阵, 所以, 设

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

则由

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

得, $2x_1 + 5x_3 = 4$, $2x_2 + 5x_4 = -6$, $x_1 + 3x_3 = 2$, $x_2 + 3x_4 = 1$,
解得 $x_1 = 2$, $x_2 = -23$, $x_3 = 0$, $x_4 = 8$, 因此

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解 2} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 4 & -6 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{[1,2]} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & -6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{[2+1(-2)]} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{[2(-1)]} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{[1+2(-3)]} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \end{array} \right),$$

所以

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

六 求广义逆矩阵

求 $m \times n$ 矩阵 A 的广义逆矩阵, 求得可逆矩阵 P, Q , 使 PAQ 为 A 的等价标准形, 记 A 的秩为 r , 则 A 的广义逆矩阵为

$$G = Q^{-1} \begin{pmatrix} E_r & C_{r \times (m-r)} \\ D_{(n-r) \times r} & F_{(n-r) \times (m-r)} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

例 9 矩阵 A 如例 7, 求 A 的广义逆矩阵.

解 按例 7 求得 P, Q , 则 A 的广义逆矩阵

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & a_1 & a_2 & \overline{a_3} \\ 0 & 1 & \vdots & a_4 & a_5 & a_6 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_7 & a_8 & \vdots & a_9 & a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

其中 a_i 为任意的数.

II 证明题

一 矩阵的等式

根据矩阵相等的定义及矩阵的运算进行证明, 特别地, 证明矩阵 $A=0$, 就是要证明 A 的每个元素均为0.

例1 设 A 是 n 阶矩阵, 且对于任一 n 维向量 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)'$, 均有 $AX=0$, 证明 $A=0$.

证明 设 $A=(a_{ij})$, 取 $X=(1, 0, \dots, 0)'$ 得, $(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})' = (0, 0, \dots, 0)'$, 所以 $a_{11}=a_{21}=\dots=a_{n1}=0$. 同样地, $a_{12}=a_{22}=\dots=a_{n2}=0, \dots, a_{1n}=a_{2n}=\dots=a_{nn}=0$, 因此 $A=0$.

例2 证明: 任一 n 阶矩阵 A 均可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

分析 用待定法. 设 $A=X+Y$, 其中 X 为对称矩阵, Y 为反对称矩阵, 则 $A'=X'+Y'=X-Y$, 从而求得 $X=\frac{1}{2}(A+A')$, $Y=\frac{1}{2}(A-A')$, 得到证明.

证明 作 n 阶矩阵 $B=\frac{1}{2}(A+A')$, $C=\frac{1}{2}(A-A')$, 则 $B'=B$, $C'=-C$, 并且 $A=B+C$, 得证.

二 可逆矩阵与初等矩阵

根据可逆矩阵、初等矩阵的概念、性质以及二者之间的关系，进行证明。

例 3 证明：若 $A^k = 0$ ， $k \geq 1$ ，则矩阵 $E - A$ 是可逆矩阵，并且 $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$ 。

证明 因为 $(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = E - A^k = E - 0 = E$ ，所以，由矩阵可逆的性质得， $E - A$ 是可逆矩阵，并且， $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$ 。

例 4 设 A 是可逆矩阵，并且 A 的各行元素之和均等于常数 a 。证明：1) $a \neq 0$ ，2) A^{-1} 的各行元素之和均等于 a^{-1} 。

证明 将 A 与 A^{-1} 均按列分块写为： $A = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)$ ， $A^{-1} = (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n)$ 。

1) 由条件知， $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = (aa \cdots a)'$ ，从而必有 $a \neq 0$ 。否则， $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$ ， A 的列向量线性相关，从而 A 的秩小于 n ， A 不可逆，引出矛盾。

2) 由 $A^{-1}A = E$ 得 $A^{-1}\alpha_j = \varepsilon_j$ ， $j = 1, 2, \cdots, n$ ，其中 ε_j 的第 j 个分量为 1，其余分量均为 0。从而

$$\begin{aligned} A^{-1}(aa \cdots a)' &= A^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \\ &= A^{-1}\alpha_1 + A^{-1}\alpha_2 + \cdots + A^{-1}\alpha_n \\ &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n = (1 \ 1 \ \cdots \ 1)', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{-1}(aa \cdots a)' &= (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n)(aa \cdots a)' \\ &= a\beta_1 + a\beta_2 + \cdots + a\beta_n = a(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n), \end{aligned}$$

所以 $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = a^{-1}(1 \ 1 \ \cdots \ 1)' = (a^{-1}a^{-1} \cdots a^{-1})'$ ，因此， A^{-1} 的各行元素之和均等于 a^{-1} 。

例 5 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ， $ad - bc = 1$ 。

证明： A 可以表成消法矩阵的乘积。

证明 因为 $ad - bc = 1$ ，所以 a, c 不能同时为 0。当 $a \neq 0$

时, 作如下初等变换

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{[2+1(-c/a)]} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{[1+2(-ab)]} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{[2+1(a^{-1})]} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{[1+2(1-a)]} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}-1 \\ 1 & a^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{[2+1(-1)]} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

用初等矩阵的乘法形式写为

$$\begin{aligned} & P(2, (-1)) P(1, 2(1-a)) P(2, 1(a^{-1})) P(1, 2(-ab)) \\ & P(2, 1(-\frac{c}{a})) A = \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以 $A = P(2, 1(\frac{c}{a})) P(1, 2(ab)) P(2, 1(-a^{-1})) P(1, 2(a-1))$
 $P(2, 1(1)) P(1, 2(a^{-1}-1)).$

当 $a=0$ 时, 则 $c \neq 0$, 且 $bc=-1$, $b=-c^{-1}$, 类似地得到
 $A = P(1, 2(-c^{-1})) P(2, 1(c)) P(1, 2(c^{-1}(d-1))).$

三 矩阵的秩

先列出下面的

基本事实: 设 A, B 是矩阵. 若 $AB=0$, 则 B 的列向量均为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解, A 的行向量均为齐次线性方程组 $B'X=0$ 的解.

由基本事实出发, 利用齐次线性方程组关于基础解系的结论, 可以很自然地统一地解决一类关于矩阵的秩的问题.

另外, 关于矩阵的秩, 有一些通常的关系式: 等式或不等式, 常常利用这些关系式证明关于矩阵的秩的问题.

例 6 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times s$ 矩阵. 证明: 若 $AB=0$, 则秩 $(A) + \text{秩}(B) \leq n$.

证明 由 $AB=0$ 知, B 的任一系列向量均为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解.

当秩 $(A)=n$ 时, $AX=0$ 仅有零解, 从而 B 的任一系列向量均为零向量, $B=0$, 秩 $(B)=0$, 结论成立.

当秩 $(A) = r < n$ 时, $AX = 0$ 的基础解系存在, 且含有 $n-r$ 个解向量, 从而 B 的列向量组的极大无关组至多含有 $n-r$ 个向量, 即秩 $(B) \leq n-r$, 结论也成立.

因此, 秩 $(A) + \text{秩}(B) \leq n$.

例 7 若 A 是 n 阶矩阵 ($n \geq 2$), 则

$$\text{秩}(A^*) = \begin{cases} n, & \text{当秩}(A) = n; \\ 1, & \text{当秩}(A) = n-1; \\ 0, & \text{当秩}(A) < n-1. \end{cases}$$

证明 直接相乘得 $AA^* = |A|E$.

当秩 $(A) = n$ 时, $|A| \neq 0$, 由 $|A||A^*| = ||A|E| = |A|^n$ 知, $|A^*| \neq 0$, 从而秩 $(A^*) = n$.

当秩 $(A) = n-1$ 时, $|A| = 0$, 从而 $AA^* = 0$, 且 A^* 有非零的列向量, 由于 $AX = 0$ 的基础解系由一个解向量组成, 而 A^* 的列向量均为 $AX = 0$ 的解, 所以秩 $(A^*) = 1$.

当秩 $(A) < n-1$ 时, A 的非零子式的最大阶数 $< n-1$, 从而 $A^* = 0$, 秩 $(A^*) = 0$.

例 8 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵. 证明: 若秩 $(C) = n$, $A(BA + C) = 0$, 则秩 $(A) + \text{秩}(BA + C) = n$.

证明 与例6相同, 证得秩 $(A) + \text{秩}(BA + C) \leq n$. 因为, $C = (BA + C) + (-BA)$, 又, 秩 $(C) = n$, 秩 $(-BA) \leq \text{秩}(A)$, 所以, 秩 $(A) + \text{秩}(BA + C) \geq n$. 因此, 秩 $(A) + \text{秩}(BA + C) = n$.

例 9 设 $A = (a_{ij})_{s \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times m}$, 证明: 秩 $(AB) \geq \text{秩}(A) + \text{秩}(B) - n$.

证明 设 A 的秩为 r , 则有可逆矩阵 P, Q , 使 $A = PA_1Q$, 其中 A_1 的 $(1,1), (2,2), \dots, (r,r)$ 元素均为1, 而其余元素均为0.

对于任意矩阵 $C = (c_{ij})_{n \times m}$, A_1C 的第1至第 r 行与 C 相同, 而其余的行均为0, 从而, 由矩阵的秩的定义得, 秩 $(A_1C) \geq$

秩(C) = (n-r). 再由关于矩阵乘积的秩的定理, 得到

$$\begin{aligned}\text{秩}(AB) &= \text{秩}(P(A_1QB)) \\ &= \text{秩}(A_1QB) \geq \text{秩}(QB) - (n-r) \\ &= \text{秩}(B) - (n-r) = \text{秩}(A) + \text{秩}(B) - n.\end{aligned}$$

四 特殊矩阵

根据特殊矩阵的概念及性质, 进行证明.

例10 设A, B均为n阶对称矩阵, 证明: AB 是对称矩阵 $\Leftrightarrow AB=BA$.

证明 \Rightarrow . $(AB)' = B'A' = BA, (AB)' = AB, AB=BA$,
 \Leftarrow . $(AB)' = B'A' = BA = AB, AB$ 是对称矩阵.

例11 若A是反对称矩阵, 且A可逆, 则 A^{-1} 也是反对称矩阵.

证明 因为 $A'(-A^{-1}) = (-A)(-A^{-1}) = E$, 所以 $(A')^{-1} = -A^{-1}$. 又, $(A^{-1})' = (A')^{-1}$, 所以, $(A^{-1})' = -A^{-1}$. 因此, A^{-1} 也是反对称矩阵.

五 行列式

有一类行列式是分块矩阵的行列式, 证明这类行列式可以用分块矩阵以及分块乘法的初等变换来做. 更一般的论述见 § 5, II.

例12 设A, B, C, D都是n阶矩阵, 并且 $|A| \neq 0, AC=CA$.

证明:
$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

分析 考虑矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 引入 $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$. 设

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix},$$

则
$$\begin{pmatrix} X_{11}A + X_{12}C & X_{11}B + X_{12}D \\ X_{21}A + X_{22}C & X_{21}B + X_{22}D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix},$$

$$X_{11}A + X_{12}C = Y_{11}, \quad X_{11}B + X_{12}D = Y_{12},$$

$$X_{21}A + X_{22}C = Y_{21}, \quad X_{21}B + X_{22}D = Y_{22}.$$

要使 $Y_{22} = AD - CB$, 就要 $X_{22} = A, X_{21} = -C$, 此时, 由AC

$=CA$ 得 $Y_{21}=0$ 。要使 $Y_{11}=E$ ，就要 $X_{12}=0$ ， $X_{11}=A^{-1}$ ，此时 $Y_{12}=A^{-1}B$ 。从而就有

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & AD-CB \end{pmatrix}.$$

两边取行列式，即得到证明。

证明 直接验证，并利用条件，可得

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & AD-CB \end{pmatrix}.$$

两边取行列式，并利用行列式的展开定理，得

$$\begin{vmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & AD-CB \end{vmatrix},$$

$$|A^{-1}| |A| \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |E| |AD-CB|,$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|.$$

例13 设 A, B 都是 n 阶实数矩阵，证明： $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} \geq 0$ 。

证明 在复数域上考虑问题，应用分块乘法的初等变换，得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & B \\ iA+i^2B & A+iB \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & A+iB \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ iE & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & A+iB \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A-iB & 0 \\ iE & E \end{vmatrix} \\ &= |A-iB| |A+iB| = \overline{|A+iB|} |A+iB| \geq 0. \end{aligned}$$

六 广义逆矩阵

根据广义逆矩阵的概念及性质，进行证明。

例14 设 A 是 $m \times n$ 矩阵， G 是 A 的一个广义逆矩阵，证明：

1) $\text{秩}(A) + \text{秩}(E_m - AG) = m;$

2) $\text{秩}(A) + \text{秩}(E_n - GA) = n.$

证明 1) 由于 G 是 A 的一个广义逆矩阵，所以 $AGA=A$ 。从而，由 $\text{秩}(A) = \text{秩}(AGA) \leq \text{秩}(AG) \leq \text{秩}(A)$ 得， $\text{秩}(A) = \text{秩}(AG)$ 。

又, $(AG)(E_m - AG) = AG - AGAG = 0$, 所以, 与例 6 相同, 可证得 $\text{秩}(A) + \text{秩}(E_m - AG) \leq m$. 但是 $\text{秩}(AG) + \text{秩}(E_m - AG) \geq \text{秩}(AG + E_m - AG) = \text{秩}(E_m) = m$.

因此, $\text{秩}(A) + \text{秩}(E_m - AG) = m$.

2) 类似于 1) 可以证明, 从略.

说明 本例用了关于矩阵秩的一些关系式.

§5 补充资料

I 置换矩阵

定义. 设 P 是 n 阶矩阵. 若 P 的每行每列元素中恰有一个为 1, 而其余元素均为 0, 则称 P 为 n 阶置换矩阵. 当 P 的 $(1, i_1), (2, i_2), \dots, (n, i_n)$ 元素为 1 时, 记为 $P = P \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$.

定理. $n(n > 1)$ 阶矩阵 P 是置换矩阵的必要充分条件是 P 为 n 阶置换矩阵的乘积.

推论. 置换矩阵的行列式等于 +1 或 -1.

定理. 用 $P = P \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ 左乘 A , 相当于第 i_1 行变为第 1 行, 第 i_2 行变为第 2 行, \dots , 第 i_n 行变为第 n 行, 由 A 得到 PA ; 右乘 B , 相当于第 1 列变为第 i_1 列, 第 2 列变为第 i_2 列, \dots , 第 n 列变为第 i_n 列, 由 B 得到 BP .

II 行列式降阶算法

第一降阶定理. 设 A 是 n 阶可逆矩阵, D 是 m 阶矩阵, M 是 $m+n$ 阶矩阵, 则

$$|M| = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| = |A| \cdot |M/A|,$$

其中 $M/A = D - CA^{-1}B$, 称为 Schur 补.

设 A 是 n 阶可逆矩阵, D 是 m 阶矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, C 是 $m \times n$ 矩阵, 则有如下的升降公式

$$|D - CA^{-1}B| = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}.$$

设 A, B, C, D 为同阶矩阵. 若 A 是可逆矩阵, 且 $AC = CA$, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

设 A 是 n 阶矩阵, D 是 m 阶可逆矩阵, M 是 $m+n$ 阶矩阵, 则

$$|M| = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|.$$

第二降阶定理. 设 A 与 D 分别为 n 阶与 m 阶可逆矩阵, B 与 C 分别为 $n \times m$ 矩阵与 $m \times n$ 矩阵, 则

$$|D - CA^{-1}B| = \frac{|D|}{|A|} \cdot |A - BD^{-1}C|.$$

Laplace 定理. 设 A 是 n 阶矩阵, 在 $|A|$ 中任意取定 k 个列, 其列号适合 $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$, 则

$$|A| = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} M \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \bar{M} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

设 A 是任一 n 阶矩阵, 则

$$\begin{aligned} |\lambda E_n + A| &= \lambda^n + \left(\sum_{i_1=1}^n M \begin{pmatrix} i_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \right) \lambda^{n-1} + \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} M \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} \right) \lambda^{n-2} \\ &\quad + \cdots + \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1} \leq n} M \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-1} \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-1} \end{pmatrix} \right) \lambda + A. \end{aligned}$$

Cauchy-Binet 公式. 设 A 是 $n \times m$ 矩阵, B 是 $m \times n$ 矩阵, 则

1) 当 $n > m$ 时, 恒有 $|AB| = 0$,

2) 当 $n \leq m$ 时, 成立

$$|AB| = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_n \leq m} M_A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} M_B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

其中 M_A 与 M_B 分别表示 A 与 B 的子式.

设 $C = AB$, 而 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times l$ 矩阵, 则当 $k > n$ 时

$$M_c \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = 0, \text{ 而当 } k \leq n \text{ 时 } M_c \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq s_1 < \cdots < s_k \leq n} M_A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_k \end{pmatrix} M_B \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

第三降阶定理。设 n 阶矩阵 A 的 k 阶顺序主子式

$$\Delta_k = M \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} \neq 0, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

记 $D_{ij} = M \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & i \\ 1 & 2 & \cdots & k & j \end{pmatrix}, \quad i, j = k+1, k+2, \cdots, n,$

则 $|A| = \frac{1}{\Delta_k^{n-k-1}} \begin{vmatrix} D_{k+1,k+1} & D_{k+1,k+2} & \cdots & D_{k+1,n} \\ D_{k+2,k+1} & D_{k+2,k+2} & \cdots & D_{k+2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{n,k+1} & D_{n,k+2} & \cdots & D_{nn} \end{vmatrix}.$

II 矩阵的直积

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix},$

则称 $A \times B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix},$

$$B \times A = \begin{pmatrix} b_{11}A & b_{12}A & \cdots & b_{1m}A \\ b_{21}A & b_{22}A & \cdots & b_{2m}A \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1}A & b_{m2}A & \cdots & b_{mm}A \end{pmatrix}$$

分别为 A 与 B 的直积, B 与 A 的直积。

直积具有下列性质:

1) $E_n \times E_m = E_{mn} = E_m \times E_n.$

2) $(A \times B)' = A' \times B'.$

3) 若 A 与 C 为同阶矩阵, B 与 D 也为同阶矩阵, 则

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = AC \times BD.$$

4) 若A与B都是对角矩阵, 则 $A \times B$ 也是对角矩阵.

5) 设A与B是同型的(指同为上三角, 或同为下三角)三角矩阵, 则 $A \times B$ 也是同型的三角矩阵.

$$6) (A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

7) 若A与B均是对称矩阵, 则 $A \times B$ 也是对称矩阵.

8) 若A为 n 阶矩阵, B为 m 阶矩阵, 则 $|A \times B| = |A|^m \cdot |B|^n$,

9) $A \times B$ 可逆的必要充分条件是A与B均可逆, 并且 $(A \times B)^{-1} = A^{-1} \times B^{-1}$.

10) $A \times B$ 的秩等于A的秩与B的秩的乘积.

11) $(\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda(A \times B)$, λ 为任何数.

12) $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$, $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.

IV 复合矩阵

一个 n 阶矩阵A的所有 k 阶子式共 $(c_n^k)^2$ 个, 将它们按下面的方法排列成为一个 c_n^k 阶矩阵 $A^{(k)}$: 1) 凡由A的某 k 个行所组成的 c_n^k 个 k 阶子式为 $A^{(k)}$ 的同一行的元素; 2) 凡由A的某 k 列所组成的 c_n^k 个 k 阶子式为 $A^{(k)}$ 的同一列的元素; 3) $A^{(k)}$ 的第一, 二, ..., 直到第 c_n^k 行(列)都按照字典的次序排列(如 $A^{(2)}$ 中, 由第一、二行组成的子式排在第一行, 在由第一、三, 一、四行等组成的子式之前, 而由第二、三行组成的子式则排在由第一、 n 行组成的子式之后, ...), 称 $A^{(k)}$ 为A的第 k 次复合矩阵.

复合矩阵具有下列性质:

$$1) E_n^{(k)} = E_{c_n^k}.$$

2) 若 $D = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 则 $D^{(k)} = (p_1, p_2, \dots, p_{c_n^k})$, 其中 p_i 为 k 个 λ_j 之积.

$$3) \text{若 } D = aE_n, \text{ 则 } D^{(k)} = a^k E_{c_n^k}.$$

$$4) (A^{(k)})' = (A')^{(k)}.$$

5) 若 A 是对称矩阵, 则 $A^{(k)}$ 也是对称矩阵.

$$6) \text{ 若 } A_1, A_2, \dots, A_t \text{ 为同阶矩阵, 则 } (A_1 A_2 \cdots A_t)^{(k)} = A_1^{(k)} \cdots A_t^{(k)}.$$

7) $A^{(k)}$ 为可逆矩阵的必要充分条件是 A 为可逆矩阵, 并且 $(A^{(k)})^{-1} = (A^{-1})^{(k)}.$

8) 若 $\text{秩}(A) = r$, 则当 $k \leq r$ 时, $\text{秩}(A^{(k)}) = r$, 而当 $k > r$ 时, $\text{秩}(A^{(k)}) = 0.$

9) 上(下)三角矩阵 A 的复合矩阵 $A^{(k)}$ 也是上(下)三角矩阵, 其主对角线上元素等于 A 的主对角线上 k 个元素的乘积.

$$10) \text{ 若 } A \text{ 为 } n \text{ 阶矩阵, 则 } |A^{(k)}| = |A|^{k-1}.$$

V Moore—Penrose逆与Drazin逆

一 Moore—Penrose逆

设 A 是 $n \times m$ 实矩阵. 若存在 $m \times n$ 矩阵 X , 使得: 1) $AXA = A$, 2) $XAX = X$, 3) $(AX)' = AX$, 4) $(XA)' = XA$, 则称 X 是 A 的一个 Moore-Penrose 逆.

对于任意的 $n \times m$ 实矩阵 A , A 的 Moore-Penrose 逆均存在且唯一, 记为 A^+ .

Moore-Penrose 逆具有下列性质: 1) $(A^+)^+ = A$, 2) $(A')^+ = (A^+)', 3) A^+ = (A'A)^+ A' = A' (AA')^+, 4) (A'A)^+ = A^+ (A')^+.$

二 Drazin逆

设 A 是 n 阶实矩阵, 使 $\text{秩}(A^m) = \text{秩}(A^{m+1})$ 成立的最小非负整数 m , 称为 A 的指数, 记为 $\text{Ind} A = m.$

任意 n 阶实矩阵 A 的指数均存在且唯一.

$\text{Ind} A = 0 \Leftrightarrow A$ 是 n 阶实矩阵, 且 A^{-1} 存在.

设 A 是 n 阶矩阵, $\text{Ind} A = m$. 若存在 n 阶矩阵 X , 使得: 1)

$AX=XA$, 2) $AX^2=X$, 3) $A^{m+1}X=A^m$, 则称 X 是 A 的一个 Drazin 逆.

对于任意的 n 阶实矩阵 A , A 的 Drazin 逆均存在且唯一, 记为 A^D .

Drazin 逆具有下列性质: 1) $\text{Ind } A^D \leq 1$, 2) $(A')^D = (A^D)'$, 3) 对任意自然数 s , 有 $(A^s)^D = (A^D)^s$, 4) $\text{Ind } A \leq 1 \Leftrightarrow (A^D)^D = A$, 5) $((A^D)^D)^D = A^D$, 6) $A^D = A^+ \Leftrightarrow AA^+ = A^+A$.

VI 高矩阵

秩数等于列数的矩阵称为高矩阵.

这样的矩阵的行数不可能小于列数, 而只能大于或等于列数, 其外表有“高”的形式, 所以称为高矩阵.

下列三命题等价: 1) $G_{m \times r}$ 是一个高矩阵, 2) 有高矩阵 H , 使 $(G \ H)$ 为可逆矩阵, 3) 有高矩阵 K , 使 $K'G=E$.

若 $G_{m \times r}$ 为高矩阵, 则有高矩阵 $H_{m \times (m-r)}$ 使 $G'H=0$; 又若有 $G'X=0$, 而 X 的列数 $>m-r$, 则 X 一定不是高矩阵.

若 G, H 均为高矩阵, 则对于任意矩阵 A , 只要可以相乘, 就有秩 $(A)=\text{秩}(GA)=\text{秩}(AH')=\text{秩}(GAH')$.

设 A 为任意矩阵, 则秩 $(A)=r$ 的必要充分条件是有两个秩数为 r 的高矩阵 G, H , 使 $A=GH'$.

若高矩阵 G, H, G_1, H_1 满足等式 $GH'=G_1H_1'$, 则必有可逆矩阵 P , 使 $GP=G_1, P^{-1}H'=H_1'$.

应用高矩阵来处理一些矩阵问题, 所得的结果, 有些在多元统计分析中是很有用的.

VII 矩阵分析

设有矩阵序列 $\{A_m\}$. 若 A_m 的每个元素当 $m \rightarrow \infty$ 时以 A 的对应位置的元素为极限, 则称 $\{A_m\}$ 收敛于矩阵 A , 记为 $A_m \rightarrow A$ 或 $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A$, A 称为 $\{A_m\}$ 的极限. 不收敛的矩阵序列称为发

散的。

若当 $m \rightarrow \infty$ 时, $A_m \rightarrow A$, $B_m \rightarrow B$, 则当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\alpha A_m + \beta B_m \rightarrow \alpha A + \beta B$, $A_m B_m \rightarrow AB$, 其中 α, β 为任何的数。

对于任意 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$, $\|A\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ 称为 A 的范数。

设 A_m 是 n 阶矩阵, 则 $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = 0$ 当且仅当 $\lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m\| = 0$ 。

给定了矩阵级数 $\sum_{m=1}^{\infty} A_m$, 并设 $S_N = \sum_{m=1}^N A_m$ 。若矩阵序列

$\{S_N\}$ 收敛而有极限 S , 则称级数 $\sum_{m=1}^{\infty} A_m$ 收敛并有和 S , 记为 $S =$

$\sum_{m=1}^{\infty} A_m$, 不收敛的矩阵级数称为发散的。

在 $S = \sum_{m=1}^{\infty} A_m$ 中, 这里 A_m 是 n 阶矩阵, 若 n^2 个对应位置的元

素构成的 n^2 个数项级数都是绝对收敛的, 则称 $\sum_{m=1}^{\infty} A_m$ 是绝对收敛的。

若幂级数 $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ 在整个复平面内是收敛的, 则对于任意 n 阶

矩阵 A , 矩阵幂级数 $\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$ 都是绝对收敛的。

设 A 是 n 阶矩阵, 则级数 $e^A = E + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$, $\cos A = E - \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{4!} A^4 - \dots$, $\sin A = A - \frac{1}{3!} A^3 + \frac{1}{5!} A^5 - \dots$ 都是绝

对收敛的。并且, $e^{iA} = \cos A + i \sin A$, $\cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$, $\sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})$, $\cos(-A) = \cos A$, $\sin(-A) = -\sin A$ 。

VIII 历史资料点滴

“矩阵”这个词是英国著名数学家西勒维斯特 (1814, 9, 3—1897, 3, 15) 于1850年首先使用的。他用来指组成行列式的数字阵列而又不是行列式本身。实际上, 矩阵的基本性质也是在行列式理论的发展中建立起来的, 这正如英国著名数学家凯莱 (1821, 8, 16—1895) 在其1885年的一篇文章中所写的: 在逻辑上, 矩阵的概念先于行列式的概念, 而在历史上次序正相反。

凯莱首先研究矩阵本身并发表了一系列文章, 所以他被认为是矩阵论的首创者。他于1855年首先引进矩阵以简化记号。他于1858年发表了这个课题的头一篇重要文章《矩阵论的研究报导》, 定义了矩阵相等, 零矩阵, 单位矩阵, 矩阵的加法, 数与矩阵的乘法。他直接从两个相继变换的效应的表示作出两个矩阵乘法的定义, 在这篇文章中, 他还叙述了逆矩阵, 并列出了求3阶矩阵的逆矩阵公式; 他还叙述了转置矩阵, 给出了 $(LMN)' = N'M'L'$, 但没有证明。

矩阵的秩的概念是由德国著名数学家弗罗宾纽斯 (1849, 10, 26—1917, 8, 3) 于1879年引进的。他指出, 一个矩阵的秩为 r 当且仅当它至少有一个 r 阶子式不为零而所有高于 r 阶的子式都为零。

1955年, 彭诺斯对任意 $n \times m$ 复数矩阵 A 引入 Moore-Penrose 广义逆; 1958年, Drazin 对于 n 阶矩阵 A 引入 Drazin 广义逆。广义逆在最小二乘法等问题中有很多应用, 现在仍为人们所研究。

行列式和矩阵两者都已经被推广到了无限阶, 并且, 十九世纪末和二十世纪初的研究, 其元素已由数而推广为一般的抽象域中的元素。

总之, 从十九世纪中叶以来, 矩阵一直是代数学的一个分支。但是, 直到二十世纪二十年代, 矩阵才成为量子力学的工具。现在, 矩阵成为普通数学教育的一部分, 它在数值分析与所有其它应用数学分支中都有着广泛的应用。

§6 基本习题

1 计算 $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}^n$.

2 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求所有与A可交换的矩阵.

3 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, 试用两种方法求A的逆矩阵.

4 解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵P, Q, 使PAQ为A的等价标准形, 并求出A的广义逆.

6 证明: 与对角矩阵可交换的矩阵必为对角矩阵.

7 证明: 若A是n阶对称矩阵, B是n阶反对称矩阵, 则AB是反对称矩阵 $\Leftrightarrow AB=BA$.

8 设A是n阶矩阵. 证明: 若有非零n阶矩阵B, 使 $AB=0$, 则必有n阶非零矩阵C, 使 $CA=0$.

9 证明: $E-AB$ 可逆 $\Leftrightarrow E-BA$ 可逆.

10 证明: 若A是n阶幂等矩阵, 则 $\text{秩}(A) + \text{秩}(E-A) = n$.

第五章 二次型

§1 概括说明

二次型的理论起源于解析几何中化二次曲线和二次曲面的方程为标准形式的问题。它在解析几何、数学分析、微分方程、数理统计等数学分支及力学，物理学中都有重要应用。

矩阵是研究二次型的有力工具，同时也是重要的研究对象。本章采用矩阵与二次型互相渗透的研究方法，矩阵与二次型两套语言平行地出现。

本章的内容分为四个部分：二次型与对称矩阵，二次型的标准形，复二次型与实二次型，正定二次型。

二次型与对称矩阵之间存在一一对应关系，二次型等价与对称矩阵合同本质上是一致的。

二次型的标准形是指二次型化得的平方和的形式。化得标准形是最重要的问题之一，常采用配方法与初等变换法两种方法。

复二次型与实二次型是两种重要的二次型。鉴于复数域与实数域的特殊性，得出了一些更深入的结果，给出了等价类的类数及代表。

研究二次型的取值的情况，得到实二次型的值类。主要讨论正定二次型的问题。

本章的补充资料是：雅可比公式，二次型束，二次型的应用，历史资料点滴。

§2 内容提要

I 二次型与对称矩阵

设 F 是一个数域， x_1, x_2, \dots, x_n 是 n 个文字。以 F 中的数为

[illegible]

称为由 x_1, x_2, \dots, x_n 到 y_1, y_2, \dots, y_n 的一个线性替换, 矩阵 $C = (c_{ij})$ 称为该线性替换的矩阵. 若 C 是非退化(可逆)的, 则称(*)是非退化(可逆)线性替换.

实际上, (*)式可以写成矩阵形式 $X=CY$, 其中 $Y=(y_1 \ y_2 \ \cdots y_n)'$.

线性替换把二次型变为二次型.

设 f 与 g 是数域 F 上的两个二次型. 若存在一个系数在 F 中的非退化线性替换把 f 变为 g , 则称 f 与 g 等价.

二次型的等价具有反身性、对称性、传递性，从而可以把二次型分类，所得的类称为等价类。

设 A, B 是数域 F 上的两个 n 阶矩阵. 若存在 F 上的 n 阶可逆矩阵 C , 使得 $B = C' A C$, 则称 A 与 B 合同.

数域 F 上的两个二次型等价, 当且仅当它们的矩阵合同.

矩阵合同具有下列性质：1) 合同的矩阵有相同的秩；2) 矩阵的合同具有反身性、对称性、传递性，从而可将矩阵分类，所得的类称为合同类；3) 与对称（反对称）矩阵合同的矩阵是对称（反对称）矩阵；4) 矩阵的合同与所考虑の数域有关。

两个二次型属于同一个等价类，当且仅当它们的矩阵属于同一个合同类。

II 二次型的标准形

若一个二次型能够经非退化线性替换化为平方和的形式, 则称该平方和为该二次型的标准形. 数域 F 上的任意一个 n 元二次型都可以经非退化线性替换化为其标准形.

数域 F 上的任意一个 n 阶对称矩阵必合同于数域 F 上的某一对

角形矩阵。该对三角形矩阵称为该对称矩阵的合同标准形。

化二次型为标准形的常用方法有两种：配方法，初等变换法。

配方法的步骤是：1) 若 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中没有平方项(即平方项的系数全为零)，而有 $x_i x_j$ 的系数不为零，此时作非退化线性替换 $x_i = y_i + y_j, x_j = y_i - y_j, x_k = y_k, k \neq i, j$ ，则出现平方项；2) 若 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中含有平方项 x_i^2 ，则先集中含 x_i 的所有项，进行配方；3) 对于剩下的 $n-1$ 个文字，继续类似地进行，直至全化为平方项为止。

初等变换法的步骤是：1) 写出 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的矩阵 A ；2) 对 A “对称地”进行行与列的初等变换，即，对行作一初等变换后，立即对列作一同样的初等变换，从而，将 A 化为对三角形矩阵 D ；3) 写出 D 对应的二次型，即为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的标准形。

数域 F 上的任意一个二次型的标准形中非零平方项的个数是唯一确定的，等于它的秩，与所作的线性替换无关。

II 复二次型与实二次型

任意一个复二次型总可以经过一个适当的非退化线性替换化成规范形 $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_r^2$ ，而且，规范形是由二次型的秩唯一决定的。从而，两个 n 元复二次型等价，当且仅当它们的秩相等， n 元复二次型共有 $n+1$ 个等价类。

对于任意一个秩为 r 的 n 阶复对称矩阵 A ，总存在复可逆矩阵 C ，使 $C'AC = (E_r, 0_{n-r})$ ，其中，主对角线上1的个数是 r ，0的个数是 $n-r$ ，称为 A 的合同标准形。两个 n 阶复对称矩阵合同，当且仅当它们有相同的合同标准形，从而， n 阶复对称矩阵有 $n+1$ 个合同类。

任意一个实二次型总可以经过一个适当的非退化线性替换化成规范形 $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_r^2$ ，而且，规范形是唯一的(惯性定律)。

秩为 r 的实二次型的规范形中正平方项的个数 p 称为正惯性指数, 负平方项的个数 $r-p$ 称为负惯性指数, 它们的差 $p-(r-p)=2p-r$ 称为符号差.

两个 n 元实二次型等价, 当且仅当它们有相同的秩 r 与相同的正惯性指数 p . 从而, n 元实二次型有 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 个等价类.

对于任意一个秩为 r 的 n 阶实对称矩阵 A , 总存在实可逆矩阵 C , 使 $C'AC = [E_p, -E_{r-p}, 0_{n-r}]$, 其中, 主对角线上1的个数是 p , -1 的个数是 $r-p$, 0 的个数是 $n-r$. p 与 r 由 A 唯一确定. 称为 A 的合同标准形. 两个 n 阶实对称矩阵合同, 当且仅当它们有相同的合同标准形, 从而, n 阶实对称矩阵有 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 个合同类.

IV 正定二次型

将实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 看作实数域上的 n 元实函数, 研究其取值的情况, 从而进行分类, 所得的类称为实二次型的值类.

设有实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, c_1, c_2, \dots, c_n 是任意一组不全为零的实数. 1) 若恒有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) > 0$, 则称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是正定的; 2) 若恒有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) < 0$, 则称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是负定的; 3) 若恒有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) \geq 0$, 则称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是半正定的; 4) 若恒有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) \leq 0$, 则称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是半负定的; 5) 若 $f(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 有时为正, 有时为负, 则称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是不定的.

设有实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$, $X = CY$ 是非退化线性替换, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (CY)'A(CY) = Y'(C'AC)Y = g(y_1, y_2, \dots, y_n)$. 1) 若有不全为零的一组实数 k_1, k_2, \dots, k_n , 使 $f(k_1, k_2, \dots, k_n) = s$, 则有不全为零的一组实数 l_1, l_2, \dots, l_n , 使 $g(l_1, l_2, \dots, l_n) = s$; 2) 若有一组不全为零的实数 l_1', l_2', \dots, l_n' , 使 $g(l_1', l_2', \dots, l_n') = s'$, 则有一组不全为零的实数 k_1', k_2', \dots, k_n' , 使 $f(k_1', k_2', \dots, k_n') = s'$.

在非退化线性替换之下，实二次型的正定性、负定性、半正定性、半负定性、不定性均保持不变。

n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的值类完全由其秩 $r(r \geq 0)$ 与正惯性指数 p 决定：1) f 是半正定的，当且仅当 $p=r$ ；2) f 是正定的，当且仅当 $p=r=n$ ；3) f 是半负定的，当且仅当 $p=0$ ；4) f 是负定的，当且仅当 $p=0$ 且 $r=n$ ；5) f 是不定的，当且仅当 $0 < p < r$ 。

若实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$ 正定，则称 f 的矩阵 A 是正定的。

正定矩阵有如下性质：1) 正定矩阵的行列式恒为正；2) 实对称矩阵 A 正定当且仅当 A 与单位矩阵合同；3) A 是正定矩阵当且仅当 A^{-1} 是正定矩阵；4) 两个正定矩阵的和是正定矩阵。

$$\text{子式} \quad D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

称为 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的顺序主子式。

实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是正定的必要充分条件是 f 的矩阵 A 的顺序主子式全为正。

§3 重点难点

本章的主题词是：二次型，二次型的矩阵，二次型的秩，线性替换，二次型等价，二次型的等价类，矩阵合同，矩阵的合同类；二次型的标准形，对称矩阵的合同标准形，配方法，初等变换法；复二次型，实二次型，规范形，惯性定律，正惯性指数，负惯性指数，符号差，复对称矩阵的合同类，实对称矩阵的合同类；二次型的值类，正定二次型，负定二次型，半正定二次型，半负定二次型，不定二次型，正定矩阵，顺序主子式，主子式。

本章的基本方法是：化二次型为标准形的配方法，化二次型为标准形的初等变换法，对称矩阵合同标准形求法，实（复）二次型的规范形求法，实二次型正定判别法。

本章的重点是：二次型的标准形，实二次型的规范形，正定二次型。

化二次型为标准形是最基本的问题，是讨论其它问题如规范形、正定性等的基础。使对称矩阵合同于对角形，是与此等价的问题。化二次型为标准形的常用方法有两种：配方法，初等变换法。配方法直接化二次型为平方和，方法较为初等，容易掌握，只是计算过程较复杂，并且，求总的线性替换较麻烦。初等变换法是通过求得与二次型的矩阵合同的对角形矩阵，间接地求得二次型的标准形。两种方法各有利弊，互相补充。总之，成为本章的一个重点。

实二次型的规范形，是在标准形的基础上求得的，由此引入了正惯性指数等概念，进一步刻划了实二次型；同时，通过规范形，很方便地研究了实二次型的值类，给出了实二次型半正定、正定、半负定、负定、不定的必要充分条件，因此，成为本章的一个重点。

实二次型的取值问题有实际的意义，而正定二次型是最基本的值类。正定二次型的判定可采用两种方法：1）化实二次型为标准形（或规范形），观察正平方项个数、秩与文字个数是否相等；2）判断二次形的矩阵是否正定，即计算矩阵的各阶顺序主子式，看其值是否均大于零。总之，正定二次型成为本章的一个重点。

本章的难点是：惯性定律的证明， n 阶实对称矩阵的合同类，正定二次型。

实二次型的规范形的唯一性，称之为惯性定律，其证明篇幅较长，而且使用反证法，较难理解，因此，惯性定律的证明成为

本章的一个难点。解决困难的方法是：1)复习关于齐次线性方程组非零解的问题，为证明作好准备；2)研究关于取值的问题，从中发现导出矛盾的方法，自然地分析出证明中的齐次线性方程组；3)进一步分析齐次线性方程组，解释 $y_{p+1}=0, \dots, y_n=0$ 所起的作用；4)分析 y_1, y_2, \dots, y_n 与 z_1, z_2, \dots, z_n 的值之间的对应关系，说明前 q 个方程就是 $z_1=z_2=\dots=z_q=0$ ；5)反复研读证明，加深理解，进一步认识证明的必然性与巧妙性。

n 阶实对称矩阵的合同标准形的结构不容易想象，从而，确定合同类的类数及每类中的代表，就更为困难，因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1)由实二次型的规范形过渡到实对称矩阵的合同标准形，明确“先1再-1最后0”的结构；2)明确同一类中的矩阵具有相同的合同标准形，该合同标准形就是该类的当然代表；3)按照“一看秩二看1三看-1”的顺序，考虑所有可能的代表，从而确定合同类的类数。

正定二次型既是本章的一个重点，又是本章的一个难点。关于用顺序主子式判定正定的结论，其证明篇幅较长，而且证明充分性时使用数学归纳法，还要进行技术上的处理；具体使用时，有些二次型的矩阵不易写出，顺序主子式不易计算，因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1)明确 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的正定性决定了 $f_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 的正定性；2)复习分块矩阵及其转置，作好准备，从而理解对于归纳假定之下矩阵的技术性处理；3)复习行计式的计算，为具体使用作准备。

§4 习题类解

I 计算题

一 求二次型的矩阵

先将字典形式改写为对称形式，而后写出矩阵。必须注意矩阵的对称性。

例 1 写出下列二次型的矩阵:

$$1) f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3;$$

$$2) f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3;$$

$$3) f_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

解 1) 因为, $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 - x_1x_3$
 $+ \frac{1}{2}x_2x_1 + 3x_2^2 + \frac{3}{2}x_2x_3$
 $- x_3x_1 + \frac{3}{2}x_3x_2 - x_3^2,$

所以, $f_1(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$

2) $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) 因为, $f_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$= x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 14x_2x_3,$$

所以, $f_3(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$

说明 1) 本例的1)与2)表示相同, 但文字的个数不同, 从而矩阵不同; 2)本例的3)说明, 对于任意的 n 阶矩阵 A , $X'AX$ 均为 n 元二次型, 但 A 未必是该二次型的矩阵.

二 求二次型的标准形

利用 § 2, II 中所述的两种方法: 配方法, 初等变换法.

例 2 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的标准形.

解 1 作非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 \\ x_2 = z_1 - z_2 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1, x_2, x_3) &= 2(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) - 6(z_1 - z_2)z_3 + 2(z_1 + z_2)z_3 \\ &= 2z_1^2 - 2z_2^2 - 4z_1z_3 + 8z_2z_3 \\ &= 2(z_1 - z_3)^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 + 8z_2z_3, \end{aligned}$$

作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1, x_2, x_3) &= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 8y_2y_3 \\ &= 2y_1^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2, \end{aligned}$$

作非退化线性替换

$$\begin{cases} w_1 = y_1 \\ w_2 = y_2 - 2y_3 \\ w_3 = y_3 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} y_1 = w_1 \\ y_2 = w_2 + 2w_3 \\ y_3 = w_3 \end{cases}$$

则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2w_1^2 - 2w_2^2 + 6w_3^2$, 即为标准形. 而这三
次线性替换的结果相当于一个总的线性替换

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

解 2 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

作如下初等变换

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1+2(1)]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1+2(1)]} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\begin{matrix} (3+1(1)) \\ (2+1(-\frac{1}{2})) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (2+1(-\frac{1}{2})) \\ (3+1(1)) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (2(2)) \\ (2(2)) \end{matrix}} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -2 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3+2(-2))} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3+2(-2))} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

则作非退化线性替换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

得到 $f(x_1, x_2, x_3) = 2u_1^2 - 2u_2^2 + 6u_3^2$.

说明 本例的解2可以图示为

$$\begin{pmatrix} A \\ \vdots \\ E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} C'AC \\ \cdots \cdots \cdots \\ C \end{pmatrix}.$$

例3 设有对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

试求可逆矩阵C, 使 $C'AC$ 为对角形矩阵.

解1 作初等变换, 见例2的解2, 从略.

所以 $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C'AC = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}.$

解2 以A为矩阵的二次型是

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3,$$

利用配方法, 见例2的解1, 从略. 得到,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2, x_3) = 2w_1^2 - 2w_2^2 + 6w_3^2,$$

所以 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C'AC = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}.$

说明 1) 例2与例3本质上是一回事; 2) 所求得的C可以不同, 对角形矩阵也可以不同.

例4 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$ 的标准形.

解 因为, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2$, 所以,

$$\text{设 } \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases},$$

则这是一个非退化的线性替换, 从而, $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2$

为标准形。

说明 1) 本例说明, 要从配方法与初等变换法中选取较简单的方法; 2) 本例还说明, 可以用一步来完成配方, 从而充分发挥配方法的优势, 但是, 要特别注意线性替换是否非退化, 此时, 可能出现退化的情况; 3) 二次型与对称矩阵, 配方法与初等变换法之间的关系, 可概括为下面两句话: 两类问题实质相同, 可以互相转化; 两种方法各有利弊, 应该酌情选择。

三 求二次型的规范形

求二次型的规范形, 一般先求出标准形, 而后再作一次适当的线性替换, 求得规范形; 有时, 也可以直接求得规范形。

利用实二次型的规范形, 可以解答正惯性指数、符号差等问题。

例 5 分别在复数域与实数域中求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的规范形。

解 同例1, 从略, 求得标准形 $f(x_1, x_2, x_3) = 2w_1^2 - 2w_2^2 + 6w_3^2$ 。

在复数域中, 作非退化线性替换

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{2} w_1 \\ v_2 = \sqrt{2} i w_2 \\ v_3 = \sqrt{6} w_3, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 \\ w_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} i v_2 \\ w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} v_3, \end{cases}$$

则 $f(x_1, x_2, x_3) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ 为规范形。

在实数域中, 作非退化线性替换

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} w_1 \\ u_2 = \sqrt{6} w_3 \\ u_3 = \sqrt{2} w_2, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 \\ w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_3 \\ w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} u_2, \end{cases}$$

则 $f(x_1, x_2, x_3) = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2$ 为规范形.

例 6 试求出三元实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的所有等价类及其代表.

解 由实二次型的秩及正惯性指数, 可知三元实二次型共有 10 个等价类, 它们的代表分别是所化得的规范形: 0 ; y_1^2 , $-y_1^2$; $y_1^2 + y_2^2$, $y_1^2 - y_2^2$, $-y_1^2 - y_2^2$; $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

例 7 求 $2n$ 元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_{2n}) = x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots + x_{2n-1}x_{2n}$ 的规范形, 并求其秩及符号差.

解 依次作非退化线性替换

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 + y_4 \\ x_4 = y_3 - y_4 \\ \dots\dots\dots \\ x_{2n-1} = y_{2n-1} + y_{2n} \\ x_{2n} = y_{2n-1} - y_{2n} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_3 \\ \dots\dots\dots \\ z_n = y_{2n-1} \\ z_{n+1} = y_2 \\ z_{n+2} = y_4 \\ \dots\dots\dots \\ z_{2n} = y_{2n} \end{array} \right. ,$$

则 $f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \dots + y_{2n-1}^2 - y_{2n}^2$
 $= z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 - z_{n+1}^2 - z_{n+2}^2 - \dots - z_n^2$ 为规范形. 从而, 秩
 为 $2n$, 符号差为 0 .

四 正定二次型的判定

判定实二次型是否正定的方法是：1)化得标准形或规范形，看系数为正的项数是否等于文字的个数；2)计算二次型的矩阵的各阶顺序主子式，看是否全为正。一般说来，方法2)较为简便。

例 8 判定实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ 是否正定.

解 1 因为, $f(x_1, x_2, x_3) = 5\left(x_1 + \frac{2}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3\right)^2 +$

$\frac{1}{5}x_1^2 - \frac{4}{5}x_1x_2 + \frac{9}{5}x_1^2 = 5(x_1 + \frac{2}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3)^2 + \frac{1}{5}(x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$, 所以, 作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{2}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

得到 $f(x_1, x_2, x_3) = 5y_1^2 + \frac{1}{5}y_2^2 + y_3^2$. 因此 $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定.

解 2 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

顺序主子式 $|5| > 0$, $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} > 0$,

所以, $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定.

例 9 求 λ 的值, 使实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_3x_1 + x_4^2$ 是正定的.

解 二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

当顺序主子式

$$|\lambda| > 0, \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} > 0, |A| > 0$$

时, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 正定. 由此得

$$\begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda^2 - 1 > 0 \\ \lambda(1 + \lambda)(\lambda - \frac{2}{\lambda} - 1) > 0, \end{cases}$$

解这个不等式组得, $\lambda > 2$. 因此, 当 $\lambda > 2$ 时, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 是正定的.

I 证明题

一 关于矩阵合同

关于矩阵合同方面的题目，证明的方法大体可归纳为两种：

1) 将对称矩阵合同的问题转化成二次型来处理；2) 利用矩阵合同的自身的性质来解决。

例 1 证明：若 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是一个 n 级排列，则下面两个矩阵合同，

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & \\ & \lambda_{i_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}.$$

证明 1 记 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & \\ & \lambda_{i_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}.$

对于二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X' B X = \lambda_{i_1} x_1^2 + \lambda_{i_2} x_2^2 + \cdots + \lambda_{i_n} x_n^2$ ，作非退化线性替换 $x_1 = y_{i_1}, x_2 = y_{i_2}, \cdots, x_n = y_{i_n}$ ，则

$f = \lambda_{i_1} y_{i_1}^2 + \lambda_{i_2} y_{i_2}^2 + \cdots + \lambda_{i_n} y_{i_n}^2 = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = Y' A Y$ ，所以，两矩阵合同。其中 $X = (x_1 x_2 \cdots x_n)'$ ， $Y = (y_1 y_2 \cdots y_n)'$ 。

证明 2 设 B 的主对角线上第 k 个元素为 λ_1 ，则 $P(1, k)' B P(1, k) = B_1$ 的主对角线上第 1 个元素为 λ_1 ；设 B_1 的主对角线上第 l 个元素为 λ_2 ，则 $P(2, l)' B_1 P(2, l) = B_2$ 的主对角线上第 1 个元素为 λ_1 ，第 2 个元素为 λ_2 ；如此下去，就有 $P(n-1, n)' \cdots P(2, l)' P(1, k)' B P(1, k) P(2, l) \cdots P(n-1, n) = A$ 若记 $C = P(1, k) P(2, l) \cdots P(n-1, n)$ ，则 $C' B C = A$ 。所以，两矩阵合同。

说明 证明 1 较为简洁且较容易理解。

例 2 证明：设 A 为 n 阶实可逆矩阵，若 A 与 $-A$ 在实数域上合同，则 n 必为偶数。

证明 因为, A 与 $-A$ 在实数域上合同, 所以, 存在实可逆矩阵 C , 使得 $-A = C'AC$, 取行列式得, $(-1)^n|A| = |-A| = |C'AC| = |A||C|^2$. 又, A 是可逆矩阵, 所以, $|C|^2 = (-1)^n > 0$, 因此, n 必为偶数.

二 关于实二次型的值

与实二次型的值有关的问题, 常常归结为规范形来处理. 适当选取文字的值, 利用规范形求出二次型的值, 并且, 易于确定值的符号.

例 3 证明: 若 A 为 n 阶实对称矩阵, 且 $|A| < 0$, 则一定存在实 n 维向量 $X_0 \neq 0$, 使 $X_0'AX_0 < 0$.

证明 因为, $|A| < 0$, 所以, 二次型 $f = X'AX$ 的秩为 n , 且不是正定的, 从而, 有非退化线性替换 $X = CY$, 使 f 化为 $y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_n^2$, $p < n$. 取 $y_{p+1} = 1$, 而其余 y_i 均为 0, 则得到相应的 $X_0 \neq 0$, 使得 $f = X_0'AX_0 = -1 < 0$.

例 4 证明: 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$ 是一个实二次型. 若有实 n 维向量 X_1, X_2 , 使 $X_1'AX_1 > 0$, $X_2'AX_2 < 0$, 则一定有实 n 维向量 $X_0 \neq 0$, 使 $X_0'AX_0 = 0$.

证明 由条件知, 二次型是不定的, 从而有非退化线性替换 $X = CY$, 使 f 化为 $y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$, $0 < p < r$. 取 $y_p = y_{p+1} = 1$, 而其余 y_i 均为 0, 则得到相应的 $X_0 \neq 0$, 使得 $f = X_0'AX_0 = 0^2 + \dots + 0^2 + 1^2 - 1^2 - 0^2 - \dots - 0^2 = 0$.

三 关于实二次型的秩与符号差

关于实二次型的秩与符号差的证明题目, 除了考虑秩与符号差的定义及性质之外, 常常考虑归结为规范形来处理.

例 5 证明: 实二次型的秩 r 与符号差 s 有相同的奇偶性, 且 $-r \leq s \leq r$.

证明 设实二次型的正惯性指数为 p , 负惯性指数为 q , 则 $p + q = r$, $p - q = s$. 从而就有 $r + s = 2p$, 所以 r 与 s 有相同的奇偶

性. 因为, $r-s=2q \geq 0$, $s=2p-r \geq -r$, 所以, $-r \leq s \leq r$.

例 6 证明实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\lambda ij + i + j)x_i x_j$ 的秩和符号差与 λ 无关.

证明 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+3 & 3\lambda+4 & \dots & n\lambda+(n+1) \\ 2\lambda+3 & 4\lambda+4 & 6\lambda+5 & \dots & 2n\lambda+(n+2) \\ 3\lambda+4 & 6\lambda+5 & 9\lambda+6 & \dots & 3n\lambda+(n+3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n\lambda+(n+1) & 2n\lambda+(n+2) & 3n\lambda+(n+3) & \dots & n^2\lambda+2n \end{pmatrix}.$$

依次把 A 的第 1 行的 (-2) , (-3) , \dots , $(-n)$ 倍分别加到第 2, 3, \dots , n 行上, 得

$$B = \begin{pmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+3 & 3\lambda+4 & \dots & n\lambda+(n+1) \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -n \\ -2 & -4 & -6 & \dots & -2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(n-1) & -2(n-1) & -3(n-1) & \dots & -n(n-1) \end{pmatrix}.$$

再对 B 作相应的列变换, 即, 把 B 的第 1 列的 (-2) , (-3) , \dots , $(-n)$ 倍分别加到第 2, 3, \dots , n 列上, 得到与 A 合同的矩阵:

$$C = \begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & -2 & \dots & -(n-1) \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(n-1) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

最后, 把 C 的第 2 行的 $\frac{1}{2}(\lambda+2)$, $-2, \dots, -(n-1)$ 倍分别加到第 1, 3, \dots , n 行上, 同时紧接着作相应的列变换, 得到与 C 合同的矩阵

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

根据合同的传递性知, A 与 D 合同, 从而可以经非退化线性替换化为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -2y_1y_2$. 由此可知, f 的秩为 2, 符号差为 0, 与 λ 无关.

例 7 证明一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的必要充分条件是, 它的秩等于 2 和符号差等于 0, 或者秩等于 1.

证明 先证必要性. 设

$$f = (a_1x_1 + \dots + a_nx_n)(b_1x_1 + \dots + b_nx_n) \neq 0.$$

若 (a_1, \dots, a_n) 与 (b_1, \dots, b_n) 成比例, 不妨设 $b_i = ka_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, 且 $a_1 \neq 0$, 则可以对 f 进行非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + \dots + a_nx_n \\ y_2 = x_2 \\ \dots\dots\dots \\ y_n = x_n \end{cases},$$

化为 $f = ky_1^2$, 此时 f 的秩为 1.

若 (a_1, \dots, a_n) 与 (b_1, \dots, b_n) 不成比例, 不妨设 (a_1, a_2) 与 (b_1, b_2) 不成比例, 则可以对 f 连续进行下列非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \\ y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n \\ y_3 = x_3 \\ \dots\dots\dots \\ y_n = x_n \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \\ y_3 = z_3 \\ \dots\dots\dots \\ y_n = z_n \end{cases},$$

化为 $f = y_1y_2 = z_1^2 - z_2^2$, 此时 f 的秩为 2, 符号差为 0.

再证明充分性. 若 f 的秩为 2, 符号差为 0, 则 f 可以通过非退化线性替换 $X = CY$ 化为 $f = y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$, 由 $Y = C^{-1}X$ 知, y_1, y_2, \dots, y_n 可由 x_1, x_2, \dots, x_n 线性表示, 代入上式, 即得到, f 是 x_1, x_2, \dots, x_n 的两个一次齐次多项式的乘积.

若 f 的秩为 1, 则 f 的规范形为 y_1^2 , 同样可知结论成立.

四 关于正定与半正定

关于实二次型或实对称矩阵正定与半正定方面的题目，可以考虑下列几种处理方法：1) 用定义证明；2) 用规范形证明；3) 用顺序主子式证明；4) 用矩阵合同证明。

例 8 证明：实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$= n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \text{ 是半正定的.}$$

证明 因为 $(n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i^2 + x_j^2)$,

所以，对任意实数 x_1, x_2, \dots, x_n 而言，有

$$\begin{aligned} f &= n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \\ &= (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i^2 + x_j^2) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

因此， f 为半正定的。

例 9 证明实二次型 f 半正定的必要充分条件是其正惯性指数 p 与秩 r 相等。

证明 先证必要性。用反证法。若 $p < r$ ，则 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经非退化线性替换 $X = CY$ 化为 $f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$ 。取 $y_{p+1} = 1$ ，而其余的 y_i 均为 0，则得到相应的一组不全为 0 的 x_1, x_2, \dots, x_n 的值，使 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -1 < 0$ ，引出

矛盾. 因此, $p=r$.

再证充分性. 若 $p=r$, 则经非退化线性替换 $X=CY$ 化为 $f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$. 对任意一组不全为0的实数 x_1, x_2, \cdots, x_n , 由 $Y=C^{-1}X$ 得一组不全为0的实数 y_1, y_2, \cdots, y_n , 从而就有 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2 \geq 0$, 因此, f 半正定.

例10 证明 n 阶实对称矩阵 A 正定的必要充分条件是它的一切主子式全大于零. 所谓主子式是指行指标与列指标相同的子式.

证明 先证必要性. 由 A 正定知二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$ 正定. 对于 A 的任一 k 阶主子式

$$|\Lambda_m| = \begin{vmatrix} a_{k1k1} & a_{k1k2} & \cdots & a_{k1km} \\ a_{k2k1} & a_{k2k2} & \cdots & a_{k2km} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{kmk1} & a_{kmk2} & \cdots & a_{kmkm} \end{vmatrix}$$

考虑 m 元二次型 $f_m(y_1, y_2, \cdots, y_m) = Y'\Lambda_m Y$, $Y' = (y_1 y_2 \cdots y_m)$, 对于任意一组不全为零的实数 y_1, y_2, \cdots, y_m , 取 $x_{k1} = y_1, x_{k2} = y_2, \cdots, x_{km} = y_m$, 其余 x_i 均为0, 则 $f_m(y_1, y_2, \cdots, y_m) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0$. 所以, $f_m(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 正定, $|\Lambda_m| > 0$.

再证充分性. 若 A 的一切主子式全大于零, 则 A 的一切顺序主子式自然全大于零, 所以, A 正定.

说明 由本例容易得到: 若 n 阶实对称矩阵 A 的主对角线上有一元素 ≤ 0 , 则 A 不正定.

例11 证明 n 阶的实数矩阵 A 正定的必要充分条件是存在 n 阶实可逆矩阵 P 使 $A = P'P$.

证明 先证必要性. 若 A 正定, 则 A 合同于 E , 从而有可逆实矩阵 Q 使 $Q'AQ = E$. 记 $P = Q^{-1}$, 则 $A = (Q^{-1})'EQ^{-1} = P'EP = P'P$.

再证充分性. 若 $A = P'P$, 则 $A' = (P'P)' = P'(P')' = P'P = A$, A 对称. 又 $A = P'EP$, A 与 E 合同. 因此 A 正定.

§5 补充资料

I 雅可比公式

设二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$ 的秩为 $r > 0$, 并且其矩阵 A 的顺序主子式 $D_i \neq 0, i=1, 2, \dots, r$, 则 f 的标准形是

$$\frac{1}{D_1} y_1^2 + \frac{D_1}{D_2} y_2^2 + \dots + \frac{D_{r-1}}{D_r} y_r^2.$$

II 二次型束

两个实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX, g(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'BX$ 决定一个二次型束 $X'AX - \lambda(X'BX)$. 当 $X'BX$ 正定时, 称为正则二次型束. 二次型束有一套理论. 此处从略. 二次型束在微振动理论中有应用.

III 二次型的应用

一 因式分解

设有 n 元二次实系数多项式

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n 2a_{i, n+1} x_i + a_{n+1, n+1}.$$

考虑实系数 $n+1$ 元二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j.$$

F 在实数域 \mathbb{R} 中能够分解为两个一次多项式乘积的必要充分条件是实二次型 f 的秩为 2 而符号差为 0 或 f 的秩为 1.

在实二次型 f 的分解式中, 令 $x_{n+1} = 1$, 即得到 n 元二次多项式 F 的分解式.

例子. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2x_3 - x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 2 = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1)(x_1 - x_2 + x_3 - 2)$.

二 二元函数的极值

$M(x_0, y_0)$ 是二元函数 $f(x, y)$ 的稳定点, 即 $f'_x(x_0, y_0) =$

$f_v'(x_0, y_0) = 0$, 并且 $f(x, y)$ 的一切二阶偏导数在 M 点连续. 记 $A = f_{xx}''(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}''(x_0, y_0)$, $C = f_{yy}''(x_0, y_0)$, 则 $d^2f = A \Delta x^2 + 2B \Delta x \Delta y + C \Delta y^2$ 是 $\Delta x, \Delta y$ 的二次型. 当该二次型负定时, 在 M 点取极大值; 当该二次型正定时, 在 M 点取极小值; 当该二次型不定时, 在 M 点无极值; 当该二次型退化时, 应进一步考虑.

三 二次曲面方程的化简

见第九章, § 2, V, 四. 此处从略.

四 微振动

一个具有 n 个自由度的力学系统, 若系统之间的关系不含时间, 并在一个有势外力作用下, 则这个系统的运动是由微分方程组

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_k'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

来决定, 其中 T 是系统的动能, U 是给定的 q_k 的函数 (力函数), 假定它不依赖于时间 t . 可以证明, T 是 q_k 对时间 t 的微商 q_k' 的二次型

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} q_i' q_j' \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

其中系数是 q_k 的已知函数. 假定

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \text{ 当 } q_1 = \dots = q_n = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

从而微分方程组有一个显然解 $q_1 = \dots = q_n = 0$, 与之对应的是这个系统的一个平衡位置. 研究平衡位置附近的微振动时, 可以认为 U 仅含有二次项, 即

$$-U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} q_i q_j \quad (b_{ij} = b_{ji}).$$

根据问题的条件, 二次型 T 与 $-U$ 是正定的, 从而, 引入一组新

的变数 p_k ，二次型 T 与 $-U$ 同时化为平方和，且 T 的平方系数为 1.

$$T = \sum_{s=1}^n p_s'^2, \quad -U = \sum_{s=1}^n \lambda_s^2 p_s^2.$$

这样，方程组就变为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial p_k'} \right) = \frac{\partial U}{\partial p_k}, \quad p_k'' + \lambda_k^2 p_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, s).$$

IV 历史资料点滴

1748年，瑞士数学家欧拉(1707, 4, 15-1783, 9, 18)在他的《无穷小分析引论》这部论著中写出了化三个变数的二次型到它们的主轴上去的问题，他详尽地说明了由二次方程定义的曲线的性质.

十八世纪末，法国数学家拉格朗日(1736—1813)引入了 n 个变量的二次型，并化为标准形.

1826年，法国数学家柯西(1787, 8, 21—1857, 5, 23)在他的《几何中无穷小演算的应用教程》这部著作中给出了将二次曲线和二次曲面的方程变形为标准形的方法，并根据二次项的符号来分类. 然而，那时并不清楚，为什么在化简成标准形时，总得到同样数目的正项和负项. 1852年，英国数学家西勒维斯特(1814, 9, 3—1897, 3, 15)回答了这个问题，给出了 n 个文字的二次型的惯性定律，认为该定律是自明的，没有给出证明. 1857年，德国数学家雅可比重新发现并证明了惯性定律.

德国数学家高斯(1777, 4, 30—1855, 2, 23)早在1801年他出版的数学巨著《算术的研究》中就包含了对二次型的探讨. 他用行列式表示二次型 $ax^2 + 2bxy + cy^2$ 的判别式，还引进了正定、半正定、负定的概念，但负定概念实际上是现代的半负定. 德国数学家狄利克雷(1805—1859)努力简化高斯的数论，把分析学的方法用于二元二次型类数的计算，引入所谓狄利克雷级数.

西勒维斯特还给出了正定二次型的必要充分条件是它的矩阵的各阶主子式全为正的结论.

1858年, 德国数学家维尔斯特拉斯 (1815, 10, 31—1897, 2, 19) 对于同时化两个二次型为平方和的问题, 给出了一般的方法, 并把这一结果应用于微振动的力学问题. 1868年, 他完成了二次型的理论, 并把这一理论推广到双线性型的情况.

§6 基本习题

1 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 为标准形.

2 用初等变换法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形.

3 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$,
试求可逆矩阵 C , 使 $C'AC$ 成为对角形.

4 判定实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 8x_1x_2 + 24x_1x_3 + 2x_2^2 - 28x_2x_3 + x_3^2$ 是否正定.

5 当 t 取什么值时, 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 是正定的?

6 设 A 是 n 阶实反对称矩阵, E 是 n 阶单位矩阵, 证明 $E - A^2$ 是正定矩阵.

7 证明正定矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 也是正定矩阵.

8 设 A, B 均为正定矩阵, α, β 均为正实数, 证明 $\alpha A + \beta B$ 是正定矩阵.

9 设 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是实数, 证明实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + a_1x_2)^2 + (x_2 + a_2x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} + a_{n-1}x_n) + (x_n + a_nx_1)^2$ 是正定的必要充分条件是 $1 + (-1)^n \prod_{i=1}^n a_i \neq 0$.

10 证明: 若 n 元实二次型 f 的正负惯性指数分别为 p, q , 则 f 可化为 $a_1y_1^2 + \dots + a_py_p^2 + b_1y_{p+1}^2 + \dots + b_qy_{p+q}^2$, 其中 a_1, \dots, a_p 为任意 p 个正数, b_1, \dots, b_q 为任意 q 个负数.

第六章 线性空间

§1 概括说明

行列式、线性方程组、矩阵的运算，属于线性代数学的范畴，可以认为是线性代数学的初等部分。同时，它们又是研究线性代数学的必备的工具。相对而言，线性空间、线性变换等，则是线性代数学的高等部分。线性空间的理论，是线性代数学这一学科的基础。

线性空间的雏型是解析几何中的平面 V_2 与空间 V_3 ，它是在考察了大量的数学对象（如几何学与物理学中的向量，代数学中的 n 维向量、矩阵、多项式，分析学中的函数等等）的本质属性后抽象出来的。线性空间是最基本的数学概念之一，它的理论与方法已经渗透到自然科学、工程技术的各个领域。

本章中，先以公理的形式给出线性空间的概念，而后由此概念出发进行逻辑推理，建立线性空间的一整套理论。这种公理化方法的意义在于，它不涉及讨论对象的具体内容及性质，得到的结论具有一般性，它是近代数学的重要标志与基本手段，对后面的学习有指导意义。

本章的内容分为四个部分：集合与映射，线性空间的定义、性质、维数，基与坐标、同构、基变换与坐标变换，线性子空间及其交、和、直和。

集合与映射是数学的基本概念，并不属于线性空间的范畴，仅作为讲述线性空间理论的必要准备。

线性空间的定义可概括为非空集合、数域、两种运算、八条公理，是本章的出发点与基础。线性空间也称为向量空间，其元

素称为向量，讨论向量的线性相关性，并由此得出维数的概念。

对于线性空间，主要研究有限维的情况，从而基起着根本的作用。由基引出向量坐标的概念，自然地建立起 n 维线性空间与 F^n 的同构，进而建立线性空间同构的一般概念。基之间的关系由过渡矩阵刻画，同时，基变换引起坐标变换。

线性子空间是一个重要的研究对象，主要研究作成子空间的条件，子空间的交、和、直和。直和在以后各章中将经常用到。

本章的补充资料是：无限维线性空间，商空间，线性方程组的解空间，历史资料点滴。

§2 内容提要

I 集合与映射

一 集合

集合是数学中最基本的概念之一，是不加定义的概念，仅给出描述。

在数学上，把某些被考察的对象的全体当作一个整体看待，称为一个集合。简言之，所谓一个集合就是作整体看的一堆东西。组成集合的东西称为该集合的元素。若 a 是集合 M 的元素，则记为 $a \in M$ ，读作“ a 属于 M ”；若 a 不是集合 M 的元素，则记作 $a \notin M$ 或 $a \bar{\in} M$ ，读作“ a 不属于 M ”。

我们已经学习过了集合 $F[x]$ ， F^n ， $M_n(F)$ 等。

所谓给出一个集合就是规定这个集合是由哪些元素组成的。因此，给出一个集合的方式不外两种：一种是列举出它的全部元素，例如， $M = \{1, 2, 3\}$ ；一种是给出这个集合的元素所具有的特征性质，记作 $M = \{a \mid a \text{ 具有的性质}\}$ ，例如， $M = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \text{ 且 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ 。

设 M 、 N 是两个集合。若 M 的每个元素都属于 N ，即，对于

任意的 $a \in M$, 均有 $a \in N$, 则称 M 是 N 的子集合, 记作 $M \subseteq N$ 或 $N \supseteq M$, 读作“ M 包含于 N ”或“ N 包含 M ”. 若 M 是 N 的子集合, 且存在 $b \in N$, 使得 $b \notin M$, 则称 M 是 N 的真子集合, 记作 $M \subset N$.

不包含任何元素的集合称为空集合, 记作 ϕ . 例如, 方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实根的集合是一个空集合. 我们规定, 空集合是任意集合的子集合, 即, 对于任意集合 M , 均有 $\phi \subseteq M$.

若两个集合 M 与 N 含有完全相同的元素, 即, $a \in M$ 当且仅当 $a \in N$, 则称它们相等, 记作 $M = N$. 我们有: $M = N \Leftrightarrow M \subseteq N$ 且 $N \subseteq M$.

设 M 、 N 是两个集合, 把它们的元素合并在一起得到一个集合, 称为 M 与 N 的并集, 记作 $M \cup N$. 即 $M \cup N = \{x | x \in M \text{ 或 } x \in N\}$.

设 M 、 N 是两个集合, M 与 N 的公共元素的全体组成一个集合, 称为 M 与 N 的交集, 记作 $M \cap N$, 即 $M \cap N = \{x | x \in M \text{ 且 } x \in N\}$.

设 M 、 N 是两个集合, 由一切属于 M 但不属于 N 的元素组成一个集合, 称为 M 与 N 的差集, 记作 $M \setminus N$ 或 $M - N$, 即 $M - N = \{x | x \in M \text{ 但 } x \notin N\}$.

求并集、交集、差集, 称为集合的运算.

集合的运算具有下列性质: 1) $M \cup N = N \cup M$, $M \cap N = N \cap M$; 2) $(M \cup N) \cup K = M \cup (N \cup K)$, $(M \cap N) \cap K = M \cap (N \cap K)$; 3) $M \cap (N \cup K) = (M \cap N) \cup (M \cap K)$, $M \cup (N \cap K) = (M \cup N) \cap (M \cup K)$; 4) $M - N = (M \cup N) - N$; 5) $M \subseteq M \cup N$, $N \subseteq M \cup N$, $M \cap N \subseteq M$, $M \cap N \subseteq N$; 6) $M \subseteq N \Leftrightarrow M \cap N = M \Leftrightarrow M \cup N = N$.

设 M 、 N 是两个集合, 由 M 中的任一元素 a 与 N 中任一元素 b 所作成的有序元素对 (a, b) 的全体组成一个集合, 称为 M 与 N 的笛卡尔积集, 记作 $M \times N$, 即 $M \times N = \{(a, b) | a \in M, b \in N\}$.

若一个集合含有有限多个元素，则称该集合为有限集合。例如，集合 $M = \{1, 2, 3\}$ 。若一个集合含有无限多个元素，则称该集合为无限集合。例如，任意数域 F 。

二 映射

设 M 与 M' 是两个集合， σ 是一个法则。若对于 M 中的每一个元素 a ，根据法则 σ ， M' 中都有唯一确定的元素 a' 与之对应，则称 σ 是集合 M 到集合 M' 的一个映射，记作 $\sigma: M \rightarrow M'$ 。映射 σ 使 $a \in M$ 与 $a' \in M'$ 对应，记作 $\sigma(a) = a'$ 。称 a' 是 a 在映射 σ 下的象，称 a 是 a' 在映射 σ 下的一个原象。

集合 M 到 M 自身的映射，称为 M 的变换。

设 M 是集合，定义 $\sigma: M \rightarrow M$ ， $\sigma(a) = a$ ， $a \in M$ ，称 σ 是集合 M 的恒等映射或单位映射，记作 I_M 。

设 σ 与 τ 是 M 到 M' 的两个映射。若对于任意的 $a \in M$ ，都有 $\sigma(a) = \tau(a)$ ，则称 σ 与 τ 相等，记作 $\sigma = \tau$ 。

设 $\sigma: M \rightarrow M'$ ，定义 $\sigma(M) = \{a' \mid a' = \sigma(a), a \in M\}$ ，称 $\sigma(M)$ 是 M 在映射 σ 下的象集合。我们有： $\sigma(M) \subseteq M'$ 。

设 $\sigma: M \rightarrow M'$ 。若由 $a \neq b$ 得出 $\sigma(a) \neq \sigma(b)$ ，对于任意 $a, b \in M$ ，则称 σ 是 M 到 M' 的一个单射，也称映射 σ 是 1-1 的。

设 $\sigma: M \rightarrow M'$ 。若对于任意的 $a' \in M'$ ，均存在 $a \in M$ ，使得 $\sigma(a) = a'$ ，换言之， $\sigma(M) = M'$ ，则称 σ 是 M 到 M' 的一个满射，也称映射 σ 是映上的。

若映射 $\sigma: M \rightarrow M'$ ，既是单射，又是满射，则称 σ 是一个双射，也称 σ 是一个一一对应，常记作 $M \leftrightarrow M'$ ， $a \leftrightarrow \sigma(a)$ ， $a \leftrightarrow a'$ 。

设有 $\sigma: M \rightarrow M'$ 与 $\tau: M' \rightarrow M''$ ，定义 $\tau\sigma: M \rightarrow M''$ ， $(\tau\sigma)(a) = \tau(\sigma(a))$ ，对于任意的 $a \in M$ ，称为 σ 与 τ 的乘积。

若 σ 是 M 到 M' 的映射，则 $I_{M'} \sigma = \sigma I_M = \sigma$ 。

若 $\sigma: M \rightarrow M'$ ， $\tau: M' \rightarrow M''$ ， $\psi: M'' \rightarrow M'''$ ，则 $(\psi\tau)\sigma = \psi(\tau\sigma)$ 。

设有 $\sigma: M \rightarrow M'$ 。若有 $\tau: M' \rightarrow M$ ，使得 $\tau\sigma = I_M$ ，则称 σ 是

左可逆映射，称 τ 是 σ 的左逆映射。若有 $\psi:M'\rightarrow M$ ，使得 $\sigma\psi=I_{M'}$ ，则称 σ 是右可逆映射，称 ψ 是 σ 的右逆映射。当 σ 是双侧可逆时，称 σ 是可逆映射。

若 $\sigma:M\rightarrow M'$ ， $\tau:M'\rightarrow M$ ， $\psi:M'\rightarrow M$ ，且 $\tau\sigma=I_M$ ， $\sigma\psi=I_{M'}$ ，则 $\tau=\psi$ 。称 τ 是 σ 的一个逆映射。 σ 的逆映射是唯一的，记作 σ^{-1} 。从而就有， $\sigma^{-1}\sigma=I_M$ ， $\sigma\sigma^{-1}=I_{M'}$ 。

若 $\sigma:M\rightarrow M'$ ，则，1) σ 是左可逆映射 $\Leftrightarrow\sigma$ 是单射；2) σ 是右可逆映射 $\Leftrightarrow\sigma$ 是满射；3) σ 是可逆映射 $\Leftrightarrow\sigma$ 是双射。

若 $\sigma:M\rightarrow M'$ ， $\tau:M'\rightarrow M''$ 均为可逆映射，则 $\tau\sigma$ 是可逆映射，并且 $(\tau\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}\tau^{-1}$ 。

I 线性空间的定义、性质、维数

一 定义与例子

设 F 是一个数域，其元素用小写英文字母 a, b, c, \dots 表示； V 是一个非空集合，其元素称为向量，用小写希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 表示。若

1° 在 V 中定义了一个加法。即对于 V 中任意两个向量 α, β ，在 V 中都有一个唯一确定的向量 γ 与它们对应，称 γ 是 α 与 β 的和，记作 $\gamma=\alpha+\beta$ 。

2° 在 F 与 V 之间有一个数量乘法。即，对于 F 中的任一数 k 与 V 中的任一向量 α ，在 V 中都有一个唯一确定的向量 δ 与它们对应，称 δ 是 k 与 α 的数量乘积，记作 $\delta=k\alpha$ 。

3° 加法和数量乘法满足：1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ ；2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ ；3) V 中存在一个向量，称为零向量，记作 0 ，使得，对于 V 中任一向量 α ，都有 $\alpha+0=\alpha$ ；4) 对于 V 中每个向量 α ，都相应地在 V 中存在一个向量 β ，称为 α 的负向量，使得 $\alpha+\beta=0$ ；5) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ ；6) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$ ；7) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$ ；8) $1\alpha=\alpha$ ，其中 α, β, γ 是 V 中任意向量， k, l 是 F 中任意数。

则称 V 对于加法与数量乘法作成 F 上的一个线性空间，简称 V 是 F 上的一个线性空间，也称为向量空间。加法与数量乘法合称为线性运算。有时，称 F 是 V 的基域，称 F 中的数为纯量，称数量乘法为纯量乘法。

我们有下列线性空间的例子：

1° 平面（空间）中的全体向量组成的集合 $V_2(V_3)$ 是实数域 R 上的线性空间；

2° F^n 是数域 F 上的线性空间；

3° $F[x]$ 对于多项式的加法与数和多项式的乘法作成数域 F 上的一个线性空间。数域 F 上的所有次数小于 n 的多项式及零多项式作成的集合记作 $F[x]_n$ ，对多项式的加法与数和多项式的乘法，也作成 F 上的一个线性空间；

4° $M_n(F)$ 对于矩阵的加法与数和矩阵的乘法，作成数域 F 的上的一个线性空间；

5° 复数域 C 是实数域 R 上的线性空间；

6° 数域 F 是其自身上的线性空间；

7° 全体实函数作成的集合 V ，对于函数的加法与数和函数的乘法，作成 R 上的线性空间；

8° 全体收敛于 0 的实数无穷数列作成的集合 V ，对于数列的加法 $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$ 与数和数列的数量乘法 $k\{a_n\} = \{ka_n\}$ ，作成 R 上的线性空间。

二 简单性质

由线性空间的定义，推出下列简单性质：

1° 零向量唯一；

2° 任一向量 α 的负向量唯一，记作 $-\alpha$ ；

3° $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_i) + (\alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_s)$ ；

4° $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ 可由其它条件推出；

5° 条件 3) 与 4) 可改为：方程 $\alpha + x = \beta$ 对于 V 中的任意

向量 α, β 有解;

6° $0\alpha=0, k0=0, (-1)\alpha=-\alpha, -(-\alpha)=\alpha, (-k)\alpha=k(-\alpha)=-k\alpha;$

7° 定义减法: $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta), k(\alpha-\beta)=k\alpha-k\beta, \alpha+\beta=\gamma\Leftrightarrow\alpha=\gamma-\beta$. 对于 V 中的任意向量 α, β , 方程 $\alpha+x=\beta$ 在 V 中有且仅有一解 $x=\beta-\alpha$;

8° $\alpha+\beta=\alpha+\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma;$

9° $k\alpha=0\Leftrightarrow k=0$ 或 $\alpha=0$;

10° $(k_1+k_2+\cdots+k_s)\alpha=k_1\alpha+k_2\alpha+\cdots+k_s\alpha,$

$k(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=k\alpha_1+k\alpha_2+\cdots+k\alpha_s;$

11° 对于任意正整数 m , 有 $m\alpha=\alpha+\alpha+\cdots+\alpha$, 共 m 个 α ;

12° $\alpha\neq 0, \alpha\in V, a, b\in F$, 则 $a\neq b\Leftrightarrow a\alpha\neq b\alpha$, 从而, 若 V 中有非零向量, 则 V 有无限多个向量.

三 线性相关性

我们先给出下列定义:

1° 设 V 是数域 F 上的线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r (r\geq 1)$ 是 V 中的一组向量, $\alpha\in V$. 若有 F 中的数 k_1, k_2, \cdots, k_r , 使得 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$, 则称 α 是向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的一个线性组合, 也称 α 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表出.

2° 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ (1) 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ (2) 是 V 中两个向量组. 若(1)中每个向量都可以由向量组(2)线性表出, 则称向量组(1)可以由向量组(2)线性表出. 若(1)与(2)可以互相线性表出, 则称(1)与(2)等价.

3° 设有线性空间 V 中的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r (r\geq 1)$. 若有数域 F 中不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_r , 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$ (3) 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 不线性相关, 即(3)式仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ 时才成立, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关,

4° 设有线性空间 V 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 及该向量组的部分组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_t}, s \geq 1, t \geq 1$. 若: 1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_t}$ 线性无关; 2) 对任一 $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, s$, 向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_t}, \alpha_i$ 均线性相关, 则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_t}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大无关组.

5° 向量组的一个极大无关组所含向量的个数称为该向量组的秩. 若向量组没有极大无关组, 则称该向量组的秩是零.

由上述定义 1° — 5°, 我们推出下列性质:

1° 若 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的一个部分组线性表出, 则 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出.

2° $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 中的任一向量 α_i 都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出.

3° 若 α 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 则 α 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出. 简言之, 线性表出具有传递性.

4° 若一向量组有一个部分组线性相关, 则该向量组线性相关. 若一向量组线性无关, 则其任一部分组均线性无关.

5° 若一向量组中有零向量, 则该向量组线性相关. 若一向量组线性无关, 则其每个向量均不为零向量.

6° 对于单独一个向量 α 而言, α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0$; α 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$. 对于向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r (r > 1)$ 而言, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 中某一向量可以由其余向量线性表出; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 中任一向量均不可以由其余向量线性表出.

7° 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r (r > 1)$ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha_1 = 0$, 或有一个 $s, 1 < s \leq r$, 使得 α_s 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表出; $\alpha_1,$

$\alpha_2, \dots, \alpha_r (r > 1)$ 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha_1 \neq 0$ 且对于任一个 $t, t = 2, 3, \dots, r$, α_t 均不可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{t-1}$ 线性表出.

8° 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是 V 中的两个向量组. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 且 $r > s$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 必线性相关. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 则 $r \leq s$.

9° 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性相关, 则 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出, 且表示方法唯一.

10° 向量组的等价具有反身性、对称性、传递性.

11° 两个线性无关的等价的向量组必含有相同个数的向量.

12° (替换定理) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是 V 中的两个向量组. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 则 $r \leq s$, 并且, 必要时可以重新编号, 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 替换 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 之后, 所得的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 等价.

13° 向量组与其任意一极大无关组等价.

14° 完全由零向量组成的向量组没有极大无关组. 若一向量组含有非零向量, 则该向量组一定有极大无关组.

15° 一个向量组的极大无关组不一定是唯一的, 它的任一个线性无关的部分组都可以扩充为一个极大无关组.

16° 一个向量组的任意两个极大无关组是等价的, 从而所包含向量的个数相等.

17° 秩是向量组自身的属性, 是唯一确定的.

18° 若两个向量组等价, 则它们的秩相等.

19° 若两个向量组等秩且其中有一个组可由另一个组线性表出, 则这两个向量组等价.

20° 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的秩是 t , 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 中任意 t 个线性无关的向量均构成它的一个极大无关组. $\alpha_1, \alpha_2,$

\cdots, α_r 线性无关当且仅当它的秩是 r , 当且仅当它的极大无关组只有其自身。

四 维数

定义. 设 V 是数域 F 上的线性空间. 若 V 中线性无关的向量的最大个数为 n , 即, V 中存在 n 个线性无关的向量, 而 V 中任意 $n+1$ 个向量均线性相关, 则称线性空间 V 是 n 维的, 记作 $\dim V = n$. 若对于任意的正整数 m , 在 V 中总存在 m 个线性无关的向量, 则称线性空间 V 是无限维的。

由定义得出: 1) $\dim F^n = n$; 2) $F(x)$ 是无限维的; 3) 若 $\dim V = 0$, 则 $V = \{0\}$; 4) 任一线性空间, 不是有限维的, 就是无限维的。

维数是衡量线性空间“大小”的一种尺度。

本书主要研究有限维的线性空间。

Ⅰ 基与坐标、同构、基变换与坐标变换

一 维数与基

设 V 是数域 F 上的线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 中的一向量组. 若: 1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关; 2) V 中任一向量都是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的线性组合, 则称 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基 (基底、底)。

数域 F 上的线性空间 V 是 n 维的 $\Leftrightarrow V$ 中存在 n 个向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 作成 V 的一组基。

n 维线性空间 V 中任意 n 个线性无关的向量均作成 V 的一组基, 任意多于 n 个向量作成的向量组必线性相关, 任意一组线性无关的向量都可以扩充为一组基。

有限维线性空间 V 的基不是唯一的, 但 V 的基所含向量的个数是固定的, 等于 $\dim V$ 。

二 基与坐标

若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基, 则 V 中任一

向量 α 均可以唯一地表为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的线性组合 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n$, 称系数组 (a_1, a_2, \dots, a_n) 为向量 α 在该组基下的坐标, 记作 $\{\alpha\}$. $\{\alpha\}$ 是 F^n 中的向量. $\{\alpha\}$ 也可以写为列的形式.

把向量当作数看待, 并认为 $a\varepsilon_i = \varepsilon_i a$, “形式地”作矩阵乘法, 得到: 向量 α 在一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标是 $a_1, a_2, \dots, a_n \Leftrightarrow$

$$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是数域 F 上的线性空间 V 的一组基, 则对于 V 中任意向量 α, β 及 F 中任意数 k , 向量在该组基下的坐标具有性质: 1) $\{\alpha + \beta\} = \{\alpha\} + \{\beta\}$; 2) $\{k\alpha\} = k\{\alpha\}$; 3) V 中向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow \{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}, \dots, \{\alpha_m\}$ 线性无关.

三 同构

定义. 设 V 与 V' 是数域 F 上的两个线性空间. 若有 V 到 V' 的双射 σ , 满足: 1) $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$; 2) $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$, 其中 α, β 是 V 中任意向量, k 是 F 中任意数, 则称 σ 是 V 到 V' 的同构映射, 称 V 与 V' 同构, 记作 $V \stackrel{\sigma}{\cong} V'$ 或 $V \cong V'$.

由定义推出下列性质:

- 1) $\sigma(0) = 0', \sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$;
- 2) $\sigma(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s) = k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + \dots + k_s\sigma(\alpha_s)$;
- 3) $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0 \Leftrightarrow k_1\sigma(\alpha_1) + k_1\sigma(\alpha_2) + \dots + k_s\sigma(\alpha_s) = 0'$;
- 4) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow \sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_s)$

线性无关;

5) 同构映射的乘积是同构映射, 同构映射是可逆映射且其逆映射也是同构映射;

6) 线性空间的同构具有反身性、对称性、传递性;

7) 若 $V \stackrel{\sigma}{\cong} V'$, W 是 V 的子空间, $\sigma(W) = \{\sigma(\alpha) | \alpha \in W\}$, 则 $\sigma(W)$ 是 V' 的子空间, 且 $W \stackrel{\sigma}{\cong} \sigma(W)$.

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, 取定 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 作

$$\sigma: V \rightarrow F^n, \sigma(\alpha) = \{\alpha\}, \forall \alpha \in V,$$

即, α 与 α 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标对应, 则 σ 是双射, 且保持线性运算, 从而 $V \stackrel{\sigma}{\cong} F^n$.

定理. 两个有限维线性空间 V 与 V' 同构 $\Leftrightarrow \dim V = \dim V'$.

在线性空间的抽象讨论中, 我们不考虑线性空间的向量具体是什么, 也不考虑其中的运算是如何具体定义的, 而只涉及线性空间在所定义的运算下的代数性质. 从这个观点看来, 同构的线性空间可以不加区别. 因此, 维数是有限维线性空间的唯一的本质特征, F^n 可以作为数域 F 上的 n 维线性空间的代表, 关于 F^n 的所有结论在一般的 n 维线性空间中均成立.

四 基变换与坐标变换

在“形式地”相乘的意义之下, 我们考虑向量组与矩阵间的运算性质.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是线性空间 V 中的两个向量组, $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 是 F 上的两个 n 阶矩阵, 则

$$1) ((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A)B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)(AB);$$

$$2) (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)(A+B) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A + (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)B;$$

$$3) (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A +$$

A, 基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n'$ 到基 $\varepsilon_1'', \varepsilon_2'', \dots, \varepsilon_n''$ 的过渡矩阵是 B, 则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到 $\varepsilon_1'', \varepsilon_2'', \dots, \varepsilon_n''$ 的过渡矩阵是 AB.

3) 若基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n'$ 的过渡矩阵是 A, 基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon_1'', \varepsilon_2'', \dots, \varepsilon_n''$ 的过渡矩阵是 B, 则 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n'$ 到 $\varepsilon_1'', \varepsilon_2'', \dots, \varepsilon_n''$ 的过渡矩阵是 $A^{-1}B$.

下面给出坐标变换公式.

设向量 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标是 $X' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 而 α 在基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n'$ 下的坐标是 $Y' = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 并且, 基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n'$ 的过渡矩阵是 A, 则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

或 $X = AY, Y = A^{-1}X$.

IV 线性子空间及其交、和、直和

一 线性子空间

设 V 是数域 F 上的线性空间, W 是 V 的非空子集合. 若 W 对于 V 的两种运算也作成数域 F 上的线性空间, 则称 W 是 V 的一个线性子空间, 简称为子空间.

数域 F 上的线性空间 V 的非空子集合 W 作成 V 的子空间 \Leftrightarrow (1) $\alpha + \beta \in W, \forall \alpha, \beta \in W$; 2) $k\alpha \in W, \forall k \in F, \forall \alpha \in W$) \Leftrightarrow ($k_1\alpha + k_2\beta \in W, \forall k_1, k_2 \in F, \forall \alpha, \beta \in W$).

任意线性空间 V 都有子空间: 零空间 $\{0\}$ 与自身 V , 称为平凡子空间, 而其它子空间 (若还有的话) 称为非平凡子空间.

线性空间 V 的子空间 W 有如下性质:

1) 子空间 W 的零向量 0_W 与整个空间 V 的零向量 0_V 一致, 即 $0_W = 0_V = 0$;

2) 子空间 W 的任一向量 α 在 W 中的负向量 $-\alpha_W$ 与在整个空

间 V 中的负向量 $-\alpha_v$ 一致, 即 $-\alpha_w = -\alpha_v = -\alpha$;

3) 子空间的维数不超过整个空间的维数 (认为有限维小于无限维)。

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, W 是 V 的 m 维子空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 W 的一组基, 则这组向量必定可以扩充为整个空间的基。即, 在 V 中必定可以找到 $n-m$ 个向量 $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$, 使得 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一组基。

二 线性包与生成向量组

设 V 是数域 F 上的线性空间, 任取 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in V$ 。作

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \left\{ \sum_{i=1}^s k_i \alpha_i \mid k_i \in F \right\},$$

则 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 是 V 的子空间。

称 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 是由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 所生成 (张成) 的子空间, 或称为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性包, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 的生成向量组, 每个 α_i 称为生成元。

$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 是 V 中所有包含 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的子空间的最小者, 它似乎紧紧地把 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 包住, 起着“最小上界”的作用, 所以称为线性包。确切地说, 它有如下三条性质:

- 1) $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 是 V 的子空间;
- 2) $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \supseteq \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$
- 3) 若 W 是 V 的子空间, 且 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \subseteq W$, 则 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \subseteq W$ 。

线性还包有如下性质:

- 1) $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价。
- 2) $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 的维数等于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩, 矩阵的行(列)向量生成的子空间称为它的行(列)空间。

三 子空间的交与和

若 W_1, W_2 是线性空间 V 的子空间, 则

$$W_1 \cap W_2 = \{\alpha \mid \alpha \in W_1, \alpha \in W_2\}$$

是 V 的子空间. $W_1 \cap W_2$ 称为 W_1 与 W_2 的交.

子空间的交具有性质:

$$1) W_1 \cap W_2 \subseteq W_1, W_1 \cap W_2 \subseteq W_2;$$

$$2) W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_1;$$

$$3) (W_1 \cap W_2) \cap W_3 = W_1 \cap (W_2 \cap W_3);$$

$$4) \bigcap_{i=1}^s W_i = W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_s = \left(\bigcap_{i=1}^t W_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=t+1}^s W_j \right).$$

若 W_1, W_2 是线性空间 V 的子空间, 则

$$W_1 + W_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$$

是 V 的子空间. $W_1 + W_2$ 称为 W_1 与 W_2 的和.

子空间的和具有性质:

$$1) W_1 \subseteq W_1 + W_2, W_2 \subseteq W_1 + W_2;$$

$$2) W_1 + W_2 = W_2 + W_1;$$

$$3) (W_1 + W_2) + W_3 = W_1 + (W_2 + W_3);$$

$$4) \sum_{i=1}^s W_i = W_1 + W_2 + \cdots + W_s = \left(\sum_{i=1}^t W_i \right) + \left(\sum_{j=t+1}^s W_j \right);$$

$$5) L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$

子空间的交与和, 具有性质:

$$1) W \subseteq W_1, W \subseteq W_2 \Rightarrow W \subseteq W_1 \cap W_2,$$

$$W_1 \subseteq N, W_2 \subseteq N \Rightarrow W_1 + W_2 \subseteq N;$$

$$2) W_1 \subseteq W_2 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = W_1 \Leftrightarrow W_1 + W_2 = W_2;$$

$$3) W_1 \cap (W_2 + W_3) \supseteq (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3);$$

$$4) W_1 \cap ((W_1 \cap W_2) + W_3) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3);$$

$$5) (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3) = W_1 + ((W_1 + W_2) \cap W_3).$$

对于有限维线性空间的子空间, 有下列的维数公式:

$$1) \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2);$$

$$2) \dim\left(\sum_{i=1}^s W_i\right) = \sum_{i=1}^s \dim W_i - \sum_{i=2}^s \dim\left(W_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} W_j\right).$$

两个子空间 W_1 与 W_2 的和是 V 的同时包含 W_1 与 W_2 的子空间的最小者, 它起着“最小上界”的作用, 从而, 子空间的和与线性包在这种意义下是类似的. 实际上, 两个有限维的子空间的和就是这两个子空间的基所生成的线性包.

四 直和与补空间

设 W_1, W_2 是线性空间 V 的子空间. 若和 $W = W_1 + W_2$ 中每个向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2$$

是唯一的, 则称该和为直和, 记作 $W = W_1 \oplus W_2$.

设 W_1, W_2 是线性空间 V 的子空间, $W = W_1 + W_2$, 则下列诸条件等价: 1) $W = W_1 \oplus W_2$; 2) 零向量的分解式唯一; 3) 某一向量 α_0 的分解式唯一; 4) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$; 5) $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$; 6) W_1 的一基与 W_2 的一基合起来即为 W 的一基.

设 V 是数域 F 上的线性空间, W 是 V 的子空间. 若有 V 的子空间 U , 使得 $V = W \oplus U$, 则称 U 是 W 的补空间 (余子空间).

n 维线性空间 V 的任一子空间均有补空间.

设 W_1, W_2, \dots, W_s 是线性空间 V 的子空间. 若和 $W = W_1 + W_2 + \dots + W_s$ 中每个向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s, \alpha_i \in W_i (i=1, 2, \dots, s)$$

是唯一的, 则称该和为直和, 记作 $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s$.

设 W_1, W_2, \dots, W_s 是线性空间 V 的子空间, $W = W_1 + W_2 + \dots + W_s$, 则下列诸条件等价: 1) $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s$; 2) 零向量的分解式唯一; 3) 某一向量 α_0 的分解式唯一; 4)

本章的基本方法是：集合相等的证明方法，映射相乘及求逆映射的方法，线性空间判定方法，确定基与维数的方法，向量坐标求法，过渡矩阵求法，坐标变换法，子空间判定方法，子空间交与和的求法，子空间直和判定方法。

本章的重点是：线性空间的定义，基与基变换，子空间的和与直和。

线性空间的定义由公理的形式给出，它是本章讨论问题的基础与出发点。线性空间的性质的推导，其它一些概念的建立，都直接或间接地依赖于线性空间的定义。因此，线性空间的定义成为本章的一个重点。

在有限维线性空间的理论中，基占有中心地位。若有限维线性空间 V 不是零空间，则 V 含有无限多个向量，取定 V 的一组基后， V 中任一向量都可以由这有限个基向量线性表出，从而实现了从无限到有限的转化。维数就是一组基中所含向量的个数。向量的坐标是对某一组确定的基而言的。数域 F 上的 n 维线性空间 V 到 F^n 的同构映射是在取定基的情况下建立的。基也是线性子空间的一个研究内容。总之，基作为一个重要概念，既贯穿于线性空间理论的始终，又是处理问题的一个基本工具。同时，基的概念既是向量组极大无关组概念的深化，又是以后几章中建立线性变换与矩阵的一一对应的桥梁。另外，基变换是一种重要的方法，过渡矩阵从量的方面刻画了基变换，基变换引起坐标变换，以后几章中常常用到基变换。因此，基与基变换成为本章的一个重点。

线性子空间的和，是本章的一个重要内容，占有较多的篇幅，其中直和的概念更为重要。将线性空间分解为其子空间的直和，是一种重要的研究方法，在以后的讨论中还要多次用到。另外，和与直和的思考方法，是代数学中的重要方法，其实质就是由局部来研究整体，在代数学的其它分支中也经常用到。因此，子空间的和与直和成为本章的一个重点。

本章的难点是：线性空间的同构，维数公式，子空间的直和。

同构映射的定义中首先用到了映射的概念，而映射概念本身是较难理解的；其次，不但要求映射是双射，而且还要求保持线性运算，这样将映射与运算联系起来，是较为复杂的。另外，具体建立两个给定线性空间之间的一个同构映射是较为困难的工作，尤其对于无限维线性空间更是如此，没有一般的方法，而仅仅依赖于灵活性与技巧性。因此，线性空间的同构成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1) 分析同构映射的定义，熟悉其各条要求；2) 通过证明数域 F 上的 n 维线性空间 V 与 F^n 同构，紧扣同构映射的各条要求，进一步加深理解；3) 研究一些具体例子，总结证明同构的方法与技巧。

维数公式，尤其是推广了的维数公式，不容易证明，更不容易得到，并且，证明的过程也较长。因此，维数公式成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1) 反复推敲证明过程，真正弄懂，归纳出主要思路；2) 找两个具体的子空间，算出维数，验证维数公式，从而，增加感性认识，并有助于牢记公式；3) 分析维数公式的推广过程，并结合两个子空间的情况去思考，两个子空间时的关键是从它们交的基出发。

子空间的直和，是在和的基础上附加条件得出的，不容易理解，而且，相互等价的条件很多，比较复杂。因此，子空间的直和成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1) 从交为 $\{0\}$ 的条件出发，体会子空间之间的关系，理解直和的含义；2) 通过研究熟悉的例子来加深理解；3) 通过研究各种等价条件，反过来进一步理解直和的定义。

§4 习题类解

I 计算题

一 映射的乘法

根据映射的乘法的定义求出乘积.

例 1 已知 $\sigma: x \mapsto 3x$, $\tau: x \mapsto 3x+1$ 是 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的两个映射, 求 $\sigma\tau$ 与 $\tau\sigma$.

解 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $(\sigma\tau)(x) = \sigma(\tau(x)) = \sigma(3x+1) = 3(3x+1) = 9x+3$, $(\tau\sigma)(x) = \tau(\sigma(x)) = \tau(3x) = 3(3x)+1 = 9x+1$.

二 线性空间

判定所给的集合对于所给的法则是否作成线性空间, 要从定义出发得出结论, 并且, 当作成线性空间时要逐条验证, 当不作成线性空间时举反例说明某一条不成立.

例 2 按照矩阵的加法及数与矩阵的乘法, 下列集合是否构成 \mathbf{F} 上的线性空间:

- 1) \mathbf{F} 上所有 $m \times n$ 矩阵的集合 V_1 ;
- 2) \mathbf{F} 上所有 n 阶可逆矩阵的集合 V_2 .

解 1) V_1 作成 \mathbf{F} 上的线性空间.

首先, $0 = (0)_{mn} \in V_1$, V_1 非空.

其次, 对于任意 $A = (a_{ij})_{mn}$, $B = (b_{ij})_{mn} \in V_1$, $k \in \mathbf{F}$, $A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{mn} \in V_1$, $kA = (ka_{ij})_{mn} \in V_1$.

再次, 对于任意 $A, B, C \in V_1$, $k, l \in \mathbf{F}$, 由矩阵的运算性质知, 成立: 1) $A+B=B+A$; 2) $(A+B)+C=A+(B+C)$; 3) 存在 $0=(0)_{mn} \in V_1$, $A+0=(a_{ij}+0)_{mn}=(a_{ij})_{mn}=A$; 4) 对任意 $A=(a_{ij})_{mn} \in V_1$, 存在 $-A=(-a_{ij})_{mn} \in V_1$, 使得 $A+(-A)=(a_{ij}+(-a_{ij}))_{mn}=(0)_{mn}=0$; 5) $k(A+B)=kA+kB$; 6) $(k+l)A=kA+lA$; 7) $k(lA)=(kl)A$; 8) $1A=A$.

2) V_2 不作成 \mathbf{F} 上的线性空间.

$A=E$, $B=-E \in V_2$, 但 $A+B=0 \notin V_2$.

三 基与维数

求线性空间的维数，一般地，需要求出它的一组基。而求一组基，只有根据基的定义去寻找，在一般情况下，没有固定的程序，视具体情况而定。

例 3 设 V 是数域 F 上的全体 n 阶对称矩阵所作成的线性空间，试求 $\dim V$ 。

解 设 E_{ij} 是第 i 行第 j 列的元素为 1，而其元素均为零的 n 阶矩阵，则 $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn} \in V$ 。又设 $H_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$ ， $1 \leq i < j \leq n$ ，则 $H_{ij}' = E_{ji} + E_{ij} = H_{ij}$ ，从而 $H_{ij} \in V$ 。易证 $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}; H_{12}, H_{13}, \dots, H_{1n}; H_{23}, H_{24}, \dots, H_{2n}; \dots; H_{n-1,n}$ 是 V 的一组基，从略。所以 $\dim V = n + (n-1) + \dots + 1 = n(n+1)/2$ 。

例 4 试求 \mathbb{Q} 上的线性空间

$V = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ 的维数。

解 证明 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ 是 V 的一组基，

1) $1, \sqrt{2}$ 线性无关。设 $k_1 + k_2\sqrt{2} = 0$ ，则必有 $k_2 = 0$ 。若不然， $k_2 \neq 0$ ，有 $\sqrt{2} = -k_1/k_2$ ，与 $\sqrt{2}$ 是无理数矛盾。从而 $k_1 = 0$ ，

2) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ 线性无关。设 $l_1 + l_2\sqrt{2} + l_3\sqrt{3} = 0$ ，则可得 $l_1 + l_2\sqrt{2} = -l_3\sqrt{3}$ ，两边平方后得到 $(l_1^2 + 2l_2^2 - 3l_3^2) + 2l_1l_2\sqrt{2} = 0$ ，由于 $1, \sqrt{2}$ 线性无关，所以 $l_1l_2 = 0$ ， $l_1^2 + 2l_2^2 - 3l_3^2 = 0$ ，若 $l_1 \neq 0$ ，则 $l_2 = 0$ ，且 $l_1^2 - 3l_3^2 = 0$ ，与 $\sqrt{3}$ 是无理数矛盾。同理 $l_2 \neq 0$ 也不可能，所以 $l_1 = l_2 = 0$ ，从而 $l_3 = 0$ 。

3) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ 线性无关。设 $t_1 + t_2\sqrt{2} + t_3\sqrt{3} + t_4\sqrt{6} = 0$ ，则可得 $t_1 + t_2\sqrt{2} = -\sqrt{3}(t_3 + t_4\sqrt{2})$ 。若 t_3, t_4 中有一个不为 0，则可得 $\frac{t_1 + t_2\sqrt{2}}{t_3 + t_4\sqrt{2}} = -\sqrt{3}$ ，经分母有理

化后可得: $a+b\sqrt{2}=-\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbf{Q}$, 与已证明的1) 矛盾.
所以 $t_3=t_4=0$, 从而 $t_1=t_2=0$.

因此, $\dim V=4$.

四 基变换与坐标变换

求过渡矩阵的方法是: 1) 根据过渡矩阵的定义直接求出;
2) 引入第三组基, 根据过渡矩阵的性质求出.

求一向量在给定基下的坐标, 方法是: 1) 将所给向量表示为基的线性组合, 通过解线性方程组求得组合的系数, 即为所求的坐标; 2) 借助于过渡矩阵, 用坐标变换公式求出.

例 5 在 \mathbf{F}^4 中求基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵, 其中

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1) \\ \varepsilon_2 = (1, 1, -1, -1) \\ \varepsilon_3 = (1, -1, 1, -1) \\ \varepsilon_4 = (1, -1, -1, 1) \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_1 = (1, 1, 0, 1) \\ \eta_2 = (2, 1, 3, 1) \\ \eta_3 = (1, 1, 0, 0) \\ \eta_4 = (0, 1, -1, -1) \end{cases}$$

解 取 \mathbf{F}^4 的基 $\varepsilon_1' = (1, 0, 0, 0)$, $\varepsilon_2' = (0, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_3' = (0, 0, 1, 0)$, $\varepsilon_4' = (0, 0, 0, 1)$. 设 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', \varepsilon_4'$ 到 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 与 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵分别为 A 与 B , 则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

从而, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵是

$$A^{-1}B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 6 在 \mathbf{F}^4 中, 试求 $\alpha = (1, 2, 1, 1)$ 在基 $\varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1)$,

$\varepsilon_2 = (1, 1, -1, -1)$, $\varepsilon_3 = (1, -1, 1, -1)$, $\varepsilon_4 = (1, -1, -1, 1)$ 下的坐标.

解 1 设 $\alpha = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + x_3 \varepsilon_3 + x_4 \varepsilon_4$, 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$$

解得, $x_1 = 5/4$, $x_2 = 1/4$, $x_3 = x_4 = -1/4$, 这就是 α 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标.

解 2 $\alpha = (1, 2, 1, 1)$ 在基 $\varepsilon_1' = (1, 0, 0, 0)$, $\varepsilon_2' = (0, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_3' = (0, 0, 1, 0)$, $\varepsilon_4' = (0, 0, 0, 1)$ 下的坐标是 1, 2, 1, 1. 设 α 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标是 x_1, x_2, x_3, x_4 , 则由 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', \varepsilon_4'$ 到 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 的过渡矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

得到
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

五 生成子空间

求 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 的基与维数, 也就是要求出 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大无关组.

例 7 设 $\alpha_1 = (2, 1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 0, 1)$, $\alpha_3 = (-1, 1, -3, 0)$, $\alpha_4 = (1, 1, 1, 1)$, 试求 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的一组基与维数.

解 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列作矩阵 A , 并且, 对 A 进行初等行变换, 得到

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

从而, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为一极大无关组. 因此, $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的一组基是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$, 维数为 3.

六 子空间的交与和

因为, $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$, 所以, 求和的基与维数, 与上面的问题五相同.

求 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \cap L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$ 的基与维数的一般方法是: 先用维数公式确定出交的维数 k , 再求出其向量的一般形状, 而后从中找到 k 个线性无关的向量即为一组基.

例 8 设 $\alpha_1 = (1, 2, 1, 0)$, $\alpha_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $\beta_1 = (2, -1, 0, 1)$, $\beta_2 = (1, -1, 3, 7)$, 试求 $L(\alpha_1, \alpha_2) \cap L(\beta_1, \beta_2)$ 的一组基与维数.

解 1) $L(\alpha_1, \alpha_2)$ 为 2 维的, $L(\beta_1, \beta_2)$ 为 2 维的, 可求得 $L(\alpha_1, \alpha_2) + L(\beta_1, \beta_2)$ 为 3 维的, 从而, 由维数公式得 $L(\alpha_1, \alpha_2) \cap L(\beta_1, \beta_2)$ 为 1 维的.

2) 若 $\alpha \in L(\alpha_1, \alpha_2) \cap L(\beta_1, \beta_2)$, 则可设 $\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 = -y_1 \beta_1 - y_2 \beta_2$, 即 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + y_1 \beta_1 + y_2 \beta_2 = 0$, 得方程组

$$\begin{cases} x_2 - x_2 + 2y_1 + y_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - y_1 - y_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3y_2 = 0 \\ x_2 + y_1 + 7y_2 = 0, \end{cases}$$

解得 $x_1 = y_2$, $x_2 = -4y_2$, $y_1 = -3y_2$, y_2 为任意数, 从而 $\alpha = y_2 \alpha_1 - 4y_2 \alpha_2 = 3y_2 \beta_1 - y_2 \beta_2$.

3) 上面方程组的系数矩阵的秩为 3, 其基础解系由一个解向量组成, 取 $(1, -4, -3, 1)$, 从而 $\alpha = \alpha_1 - 4\alpha_2 = 3\beta_1 - \beta_2 =$

$(5, -2, -3, 4)$. 因此, $(5, -2, -3, 4)$ 是 $L(\alpha_1, \alpha_2) \cap L(\beta_1, \beta_2)$ 的一组基.

I 证明题

一 集合与映射

证明集合 M 与 N 相等的一般方法是: 先证明 $M \subseteq N$, 再证明 $N \subseteq M$, 从而就有 $M = N$.

关于映射的证明, 一般根据定义进行验证.

例 1 设 $f(x), g(x) \in F[x]$, $d(x) = (f(x), g(x))$, 证明 $\{u(x)f(x) + v(x)g(x) \mid u(x), v(x) \in F[x]\} = \{w(x)d(x) \mid w(x) \in F[x]\}$.

证明 为叙述方便, 记 $M = \{u(x)f(x) + v(x)g(x) \mid u(x), v(x) \in F[x]\}$, $N = \{w(x)d(x) \mid w(x) \in F[x]\}$.

先证明 $M \subseteq N$. 记 $f(x) = d(x)f_1(x)$, $g(x) = d(x)g_1(x)$. 对于 M 中的任元素 $\alpha = u(x)f(x) + v(x)g(x)$, 有

$$\begin{aligned} \alpha &= u(x)d(x)f_1(x) + v(x)d(x)g_1(x) \\ &= (u(x)f_1(x) + v(x)g_1(x))d(x) \end{aligned}$$

所以 $\alpha \in N$, $M \subseteq N$.

再证 $N \subseteq M$. 因为 $d(x) = (f(x), g(x))$, 所以, 根据最大公因式的性质, 存在 $u_0(x), v_0(x) \in F[x]$, 使得 $d(x) = u_0(x)f(x) + v_0(x)g(x)$. 对于 N 中的任意元素 $\beta = w(x)d(x)$, 有 $\beta = w(x)(u_0(x)f(x) + v_0(x)g(x)) = (w(x)u_0(x))f(x) + (w(x)v_0(x))g(x)$, 所以 $\beta \in M$, $N \subseteq M$.

因此, $M = N$.

例 2 设

$$\sigma: M_n(F) \rightarrow M_n(F), \quad \sigma(A) = A', \quad \forall A \in M_n(F),$$

证明 σ 是一个双射.

证明 显然, σ 是映射. 任取 $A \in M_n(F)$, 则 $A' \in M_n(F)$ $\sigma(A') = (A')' = A$, 所以, σ 是满射. 对于任意的 $A, B \in$

$M_n(\mathbf{F})$, 若 $A \neq B$, 则 $A' \neq B'$, 即 $\sigma(A) \neq \sigma(B)$, 所以, σ 是单射. 因此, σ 是一个双射.

二 线性空间

要证明一个非空集合 V 作成数域 \mathbf{F} 上的线性空间, 必须按定义逐条逐点进行检查; 而当证明 V 不作成 \mathbf{F} 上的线性空间时, 只要指出不符合定义中的某一个条件, 并且只要通过具体例子指出就可以了.

例 3 设 V 是正实数的集合, 规定: 对于任意的 $\alpha, \beta \in V$, $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta$; 对于任意的 $\alpha \in V$, 任意的 $k \in \mathbf{R}$, $k \circ \alpha = \alpha^k$, 证明 V 是 \mathbf{R} 上的线性空间.

证明 V 显然非空, 并且, 所规定的两个法则分别是 V 的加法与 \mathbf{R} 和 V 的数量乘法.

又, 对于任意 $\alpha, \beta, \gamma \in V$, 任意 $k, l \in \mathbf{R}$, 有

$$1) \alpha \oplus \beta = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \oplus \alpha;$$

$$2) (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma);$$

$$3) 1 \oplus \alpha = 1\alpha = \alpha, \quad 1 \text{ 是 } V \text{ 中的零向量};$$

$$4) \frac{1}{\alpha} \oplus \alpha = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1, \quad \frac{1}{\alpha} \in V \text{ 是 } \alpha \text{ 的负向量};$$

$$5) k \circ (\alpha \oplus \beta) = k \circ (\alpha\beta) = (\alpha\beta)^k = \alpha^k \beta^k = (k \circ \alpha) \oplus (k \circ \beta);$$

$$6) (k+l) \circ \alpha = \alpha^{k+l} = \alpha^k \alpha^l = (k \circ \alpha) \oplus (l \circ \alpha);$$

$$7) k \circ (l \circ \alpha) = k \circ (\alpha^l) = (\alpha^l)^k = \alpha^{lk} = \alpha^{kl} = (kl) \circ \alpha;$$

$$8) 1 \circ \alpha = \alpha^1 = \alpha.$$

因此, V 作成 \mathbf{R} 上的线性空间.

例 4 设 n 是固定正整数, V 是数域 \mathbf{F} 上所有次数等于 n 的多项式的集合. 证明 V 对于多项式的加法及数与多项的乘法不作成 \mathbf{F} 上的线性空间.

证明 $x^n, -x^n \in V$, 但 $x^n + (-x^n) = 0 \notin V$. 因此, V 不作成 \mathbf{F} 上的线性空间.

三 线性相关性

关于向量线性相关性的证明,一般方法是:从向量的线性组合为零向量的等式出发,应用已知条件求得组合系数的性质,得到所要的结论.在证明过程中注意使用有关的性质.

例 5 设 V 是数域 F 上的线性空间. 若 $\alpha, \beta \in V$, 且线性无关, 又 $x \in V$ 且 $x \neq 0$, 证明 α, x 与 β, x 中至少有一组线性无关.

证明 用反证法. 设 α, x 与 β, x 均线性相关, 则 $\alpha = c_1 x$, $\beta = c_2 x$, $c_1, c_2 \in F$. 由 α, β 线性无关得 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, 从而 $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$. 但由 $\alpha = c_1 x, \beta = c_2 x$ 得 $\alpha - \frac{c_1}{c_2} \beta = c_1 x - c_1 x = 0$, 从而 α, β 线性相关, 引出矛盾. 因此, α, x 与 β, x 中至少有一组线性无关.

例 6 设 $A \in M_n(F)$, m 是大于 1 的整数, 使得 $A^{m-1} \neq 0$ 但 $A^m = 0$. 证明: F^n 中有(列)向量 α , 使 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

证明 1) 先找到 α . 为此, 设

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

则至少有一个 ε_i , 使 $A^{m-1}\varepsilon_i \neq 0$. 否则, 若 $A^{m-1}\varepsilon_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$, 则有

$$A^{m-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

即 $A^{m-1} = 0$, 引出矛盾. 记 $\varepsilon_i = \alpha$, 则 $A^{m-1}\alpha \neq 0$.

2) 设有 $k_0\alpha + k_1A\alpha + \cdots + k_{m-1}A^{m-1}\alpha = 0$, 则 $k_0 = k_1 = \cdots = k_{m-1} = 0$. 否则, 设 k_i 是 k_0, k_1, \dots, k_{m-1} 中第一个不为零的数, 则有 $k_i A^i \alpha + \cdots + k_{m-1} A^{m-1} \alpha = 0$, 用 A^{m-i-1} 乘该等式两

端, 得 $k_i A^{m-1} \alpha = 0$, 从而 $A^{m-1} \alpha = 0$, 引出矛盾. 因此, F^n 中有 α , 使 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

四 基与维数

证明一组向量作成线性空间 V 的基, 要按照基的定义证明两个方面: 该组向量线性无关, V 的任一向量可由该组向量线性表出; 证明线性空间 V 的维数是 n , 一般要选出 V 的 n 个向量, 并证明这 n 个向量作成 V 的一组基.

例 7 设 V, W 是数域 F 上的两个线性空间, 且 $\dim V = n > 0$, $\dim W = m > 0$. 作 $V \times W = \{(x, y) | x \in V, y \in W\}$, 并且规定: $(x, y) = (x_1, y_1)$ 当且仅当 $x = x_1, y = y_1$, $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $k \odot (x, y) = (kx, ky)$, $k \in F$. 证明: 1) $V \times W$ 对于 \oplus, \odot 作成 F 上的线性空间, 2) $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$.

证明 1) 根据线性空间的定义验证, 从略.

2) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 与 y_1, y_2, \dots, y_m 分别是 V 与 W 的一组基, 则 $(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_n, 0), (0, y_1), (0, y_2), \dots, (0, y_m)$ 是 $V \times W$ 的一组基.

首先, 设 $k_1, k_2, \dots, k_n, l_1, l_2, \dots, l_m \in F$, 使 $\sum_{i=1}^n k_i (x_i, 0) \oplus$

$$\sum_{j=1}^m l_j (0, y_j) = (0, 0), \text{ 则 } \left(\sum_{i=1}^n k_i x_i, \sum_{j=1}^m l_j y_j \right) = (0, 0);$$

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i = 0, \sum_{j=1}^m l_j y_j = 0, \text{ 从而 } k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0, l_1 = l_2 =$$

$\dots = l_m = 0$. 所以, 这 $n+m$ 个向量线性无关.

其次, 对于任意的 $(\alpha, \beta) \in V \times W$, 由 $\alpha \in V, \beta \in W$ 得 $\alpha =$

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i, \beta = \sum_{j=1}^m b_j y_j, a_i, b_j \in F, i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots,$$

m , 从而, $(\alpha, \beta) =$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i, \sum_{j=1}^m b_j y_j \right) = \sum_{i=1}^n a_i (x_i, 0) \oplus \sum_{j=1}^m b_j (0, y_j).$$

因此, 这 $n+m$ 个向量作成 $V \times W$ 的一组基, $\dim(V \times W) = n+m = \dim V + \dim W$.

五 同构

证明线性空间同构的一般方法是: 构造一个映射, 而后按定义验证该映射是同构映射. 对于有限维的情况, 也可以证明维数相等, 按定理判定同构.

例 8 证明实数域 \mathbf{R} 作为自身上的线性空间与例 3 中的线性空间 V 同构.

证明 1 对于 V , 1 是其零向量. 取 $a \in V$, $a \neq 1$, 则 a 线性无关. 又, 对于任意 $b \in V$, 有 $k = \log_a b$, 使 $b = k \circ a$. 所以, a 作成 V 的一组基, 从而, V 是一维的. 而 \mathbf{R} 作为其自身上的线性空间也是一维的. 因此, 根据定理知, $\mathbf{R} \cong V$.

证明 2 作 $\sigma: \mathbf{R} \rightarrow V$, $\sigma(x) = 2^x$, $\forall x \in \mathbf{R}$. 显然, σ 是映射, 且易证是双射, 从略. 又, 对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{R}$, 有

$$\sigma(x+y) = 2^{x+y} = 2^x 2^y = 2^x \oplus 2^y = \sigma(x) \oplus \sigma(y),$$

$$\sigma(kx) = 2^{kx} = (2^x)^k = k \circ 2^x = k \circ \sigma(x).$$

因此, σ 是同构映射, 从而 $\mathbf{R} \cong V$.

六 线性子空间

关于线性子空间的证明题, 有如下几种类型: 1) 关于线性空间的子集作成子空间的问题, 只要证明子集非空且对于线性运算封闭; 2) 关于子空间相等、包含关系的问题, 按集合的相等、包含关系来证明, 只是要注意应用线性子空间及其交与和的性质; 3) 子空间的基与维数的问题, 按前面的第四部分所述方法进行; 4) 关于维数公式的证明题; 5) 关于某些向量与子空间的

关系的证明题，6)关于子空间的直和的问题，一般要先证明是和，再证明零向量表法唯一或交所具有的性质，对于有限维的情况也常常利用维数间的关系来证明。

例9 设 W, W_1, W_2 都是线性空间 V 的子空间， $W_1 \subseteq W_2$ ， $W \cap W_1 = W \cap W_2$ ， $W + W_1 = W + W_2$ ，证明 $W_1 = W_2$ 。

证明 只要证明 $W_2 \subseteq W_1$ 。对于任意 $\alpha_2 \in W_2$ ，由 $\alpha_2 \in W_2 \subseteq W + W_2 = W + W_1$ 得， $\alpha_2 = \alpha + \alpha_1$ ，其中 $\alpha \in W$ ， $\alpha_1 \in W_1$ ，从而 $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha \in W$ 。又， $\alpha_1 \in W_1 \subseteq W_2$ ，所以， $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \in W_2$ ，从而 $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \in W \cap W_2 = W \cap W_1$ ， $\alpha \in W_1$ ， $\alpha_2 = \alpha + \alpha_1 \in W_1$ 。

说明 本例说明对于子空间的和与交，消去律均不成立。

例10 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的子空间，证明 $W_1 \cup W_2$ 是 V 的子空间 $\Leftrightarrow W_1 \subseteq W_2$ 或 $W_2 \subseteq W_1$ 。

证明 \Rightarrow 。用反证法。设 $W_1 \not\subseteq W_2$ 且 $W_2 \not\subseteq W_1$ ，则有 $\alpha_1 \in W_1$ 但 $\alpha_1 \notin W_2$ ，并且有 $\alpha_2 \in W_2$ 但 $\alpha_2 \notin W_1$ 。由于 $\alpha_1, \alpha_2 \in W_1 \cup W_2$ ，又 $W_1 \cup W_2$ 是子空间，所以 $\alpha_1 + \alpha_2 \in W_1 \cup W_2$ ，从而 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta \in W_1$ 或 $\beta \in W_2$ 。若 $\beta \in W_1$ ，则 $\alpha_2 = \beta - \alpha_1 \in W_1$ ，引出矛盾；若 $\beta \in W_2$ ，则同样引出矛盾。因此， $W_1 \subseteq W_2$ 或 $W_2 \subseteq W_1$ 。

\Leftarrow 。显然。

例11 设 V_1, V_2, \dots, V_s 是线性空间 V 的 s 个非平凡子空间，证明 V 中至少有一个向量不属于 V_1, V_2, \dots, V_s 中的任何一个。

证明 对于空间的个数 s 作数学归纳法。当 $s=1$ 时，由 V_1 是非平凡子空间知，有向量 $\alpha \notin V_1$ 时，结论成立。

设 $s=k$ 时结论成立。对于 $s=k+1$ ，有 V 的 $k+1$ 个非平凡子空间 $V_1, V_2, \dots, V_k, V_{k+1}$ 。由归纳假设，对于 V_1, V_2, \dots, V_k ，至少有一个向量 α 不属于其中任何一个 V_i ($i=1, 2, \dots, k$)。若 $\alpha \notin V_{k+1}$ ，则结论成立；若 $\alpha \in V_{k+1}$ ，则有 $\beta \notin V_{k+1}$ ，考虑下列 $k+1$ 个向量的向量组：

$$\alpha + \beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \beta, \dots, (k+1)\alpha + \beta, \quad (*)$$

其中必有一个向量不属于 V_1, V_2, \dots, V_k 这 k 个子空间中的任一个. 若不然, 则一定有两个向量属于某个 $V_j (1 \leq j \leq k)$, 从而这两个向量差为 $m\alpha (0 < |m| \leq k)$ 属于 V_j , 与 $\alpha \notin V_j$ 矛盾. 所以, (*) 中有向量, 不妨设为 $\gamma = l\alpha + \beta$, 不属于 V_1, V_2, \dots, V_k 中的任一个. 又, 由 $\alpha \in V_{k+1}, \beta \in V_{k+1}$, 则 $l\alpha + \beta \in V_{k+1}$, 结论成立.

例12 设 $W = \{A \mid A \in M_n(\mathbf{F}), A' = A\}$, $W_2 = \{A \mid A \in M_n(\mathbf{F}), A' = -A\}$, 证明: 1) W_1, W_2 是 $M_n(\mathbf{F})$ 的子空间; 2) $M_n(\mathbf{F}) = W_1 \oplus W_2$.

证明 1) 易证 W_1, W_2 作成 $M_n(\mathbf{F})$ 的子空间, 从略.

2) 对于任意 $A \in M_n(\mathbf{F})$, 有 $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$, 令 $A_1 = \frac{1}{2}(A + A')$, $A_2 = \frac{1}{2}(A - A')$, 则 $A_1' = A_1$, $A_2' = \frac{1}{2}(A' - A) = -\frac{1}{2}(A - A') = -A_2$, 所以, $A_1 \in W_1$, $A_2 \in W_2$. 因此, $M_n(\mathbf{F}) = W_1 + W_2$.

对于 $B \in W_1 \cap W_2$, 有 $B \in W_1, B = B'$; $B \in W_2, B' = -B$, 所以 $-B = B, 2B = 0, B = 0$, 从而 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, 因此, $M_n(\mathbf{F}) = W_1 \oplus W_2$.

§5 补充资料

I 无限维线性空间

基的定义. 设 V 是数域 \mathbf{F} 上的线性空间, B 是 V 的一个非空子集合. 若: 1) B 中任意有限多个向量均线性无关; 2) 对于 V 中的任意向量 α , 均存在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in B$, 及 $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbf{F}$, 使得 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$, 则称 B 是 V 的一基底, 简称为基.

基的存在定理. 设 V 是数域 \mathbf{F} 上的非零线性空间, 则 V 存在基底.

定义. 设 B 是数域 F 上的线性空间 V 的一基. 若 B 为无限集合, 则称 V 是无限维线性空间.

II 商空间

定义. 设 V 是数域 F 上的线性空间, $\alpha \in V$, M 是 V 的一个子空间. 若有 $\alpha' \in V$, 使得 $\alpha - \alpha' \in M$, 则称 α 与 α' 模 M 同余, 记作 $\alpha \equiv \alpha' \pmod{M}$. 向量模 M 同余具有反身性、对称性、传递性.

设 α 是 V 中任意向量, 作 V 的子集 $\alpha + M = \{\alpha + m \mid m \in M\}$, 则 $\alpha \equiv \alpha' \pmod{M} \Leftrightarrow \alpha' \in \alpha + M$. 称 $\alpha + M$ 为一个模 M 同余类, 称 α 是同余类 $\alpha + M$ 的一个代表.

模 M 的同余类具有性质: 1) 若 $\alpha' \in \alpha + M$, 则 $\alpha' + M = \alpha + M$. 因而, 可取 $\alpha + M$ 中任一元素作为它的代表. 2) 两个模 M 同余类若不相等, 则没有公共元素, 即它们的交为空集. 因而, V 可以分成互不相交的同余类的并集.

V 中模 M 同余类的全体用 \tilde{V} 表示. 在 \tilde{V} 中规定:

$$1) (\alpha + M) + (\beta + M) = (\alpha + \beta) + M, \quad \forall \alpha, \beta \in V;$$

$$2) k(\alpha + M) = k\alpha + M, \quad \forall \alpha \in V, \quad \forall k \in F,$$

则这两个法则与同余类代表的选择无关, 换言之, 这分别是 \tilde{V} 的加法、 F 与 \tilde{V} 的数量乘法, 进而, \tilde{V} 对于该加法与该数量乘法作成 F 上的线性空间, 称 \tilde{V} 是 V 对于子空间 M 的商空间, 记作 V/M .

定理. 设 V 是数域 F 上的有限维线性空间, M 是 V 的子空间, 则 $\dim(V/M) = \dim V - \dim M$.

III 线性方程组的解空间

含有 n 个未知量的齐次线性方程组的所有解组成 F^n 的一个子空间 W . 若其系数矩阵的秩为 r , 则 W 的维数是 $n - r$. 当 $r < n$ 时, 齐次线性方程组的一基础解系就是 W 的一组基. 当 $r = n$ 时, $W = \{0\}$. 非齐次线性方程组的解不构成 F^n 的子空间. 对于 F^n 的任一子空间 W , 均存在一齐次线性方程组, 以 W 为其解空间.

IV 历史资料点滴

英国数学家哈密尔顿 (1805, 8, 3—1865, 9, 2) 自1828年开始研究四元数, 他在1835年送交爱尔兰科学院的论文《共轭函数或者代数对的理论》中把复数 $a+bi$ 作为实数有序偶 (a, b) , 进行了详细研究。他进一步考虑表示三个、四个及其它个数的情况, 终于在1843年创造了四元数 $a+bi+cj+dk$ 。“向量”一词是他首先引进的, 他开创了向量理论和向量计算。他试图创立三维空间的向量代数学, 引入“外乘法”或“纯量乘法”, 作为一个特殊的向量空间。

德国数学家格拉斯曼 (1809, 4, 18—1877, 9, 26) 在1844年发表《扩张的理论》一文, 提出名词“超复数”。 n 维超复数, 可以看作一个 n 元有序组 (a_1, a_2, \dots, a_n) , 也可认为是一个线性组合 $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$, 它是具有单位长度的 n 个“独立的”元素 (即单位向量 e_1, e_2, \dots, e_n) 构成的, 而组合的系数 a_1, a_2, \dots, a_n 都是某个数域中的数。格拉斯曼同时研究了欧几里得多维空间, 把点、直线、平面、两点之间的距离推广到空间 R^n , 包含了一般的 n 维几何的概念。

维数的概念最初起源于解析几何。1829年, 德国数学家普吕克 (1801, 7, 16—1868, 5, 22) 开辟了坐标体系的新领域, 导致了维数论的产生。他认为, 一种几何的维数就是为这种几何的基本元素定位所需要的独立的坐标的数目。现在, 维数论已发展为一个具有相当广度和深度的课题。

1906年, 法国数学家弗雷谢 (1878—1973) 开始了抽象空间的研究, 从而, “空间”得到了新的概括, 包括所谓“无穷维向量空间”, 由此所产生的理论与近代数学的最重要部门如微分方程、积分方程和三角级数等, 有密切联系, 同时与近代理论物理, 首先与量子力学有密切的联系。

§6 基本习题

1 检验以下集合对于所指定的法则是否构成实数域上的线

性空间:

- 1) 全体上三角矩阵, 对于矩阵的加法与数乘运算;
- 2) 平面上的全体向量, 对于通常的加法和如下定义的数量乘法 $k\alpha=0$;
- 3) 集合与加法同 2), 但数乘运算定义为 $k\alpha=\alpha$;
- 4) $V=\{f(x)|f(\alpha)=f(\beta)=0, f(x)\text{ 为实函数}\}$, 对于函数的加法及数与函数的乘法, α, β 为固定的实数.

2 求 F^3 中向量 $\alpha=(3,7,,1)$ 对于基 $\alpha_1=(1,3,5), \alpha_2=(6,3,2), \alpha_3=(3,1,0)$ 的坐标.

3 在 F^4 中有两组基

$$\begin{cases} \varepsilon_1=(1,0,0,0) \\ \varepsilon_2=(0,1,0,0) \\ \varepsilon_3=(0,0,1,0) \\ \varepsilon_4=(0,0,0,1), \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1=(2,1,-1,1) \\ \alpha_2=(0,3,1,0) \\ \alpha_3=(5,3,2,1) \\ \alpha_4=(6,6,1,3), \end{cases}$$

- 1) 求 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的过渡矩阵;
- 2) 求向量 $\alpha=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 关于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的坐标.
- 4 设 $\alpha_1=(1,1,0,0), \alpha_2=(1,0,1,1); \beta_1=(0,0,1,1), \beta_2=(0,1,1,0)$, 试求 $L(\alpha_1, \alpha_2)+L(\beta_1, \beta_2)$ 的维数与一组基.
- 5 条件同上题, 试求 $L(\alpha_1, \alpha_2) \cap L(\beta_1, \beta_2)$ 的一组基.
- 6 证明: 若 W 是线性空间 V 的真子空间, $x_1 \notin W, x_2 \in W$, 且 $x_2 \neq 0$, 则 x_1, x_2 线性无关.
- 7 证明: 若 W_1, W_2 是线性空间 V 的子空间, $W_1 \subseteq W_2$, 且 $\dim W_1 = \dim W_2$, 则 $W_1 = W_2$.
- 8 证明: 复数域 C 作为实数域 R 上的线性空间与 $M_2(R)$ 的子空间 $W=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in R\right\}$ 同构.
- 9 证明: 所有与 A 可交换的矩阵作成 $M_n(F)$ 的一个子空间, 其中 A 是 $M_n(F)$ 中的一个固定矩阵.
- 10 设 V_1 与 V_2 分别是齐次线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间, 证明 $F^n=V_1 \oplus V_2$.

第七章 线性变换

§1 概括说明

线性空间是某一类事物从量的方面的一个抽象。研究线性空间，不仅要研究线性空间的总体结构，线性空间之间的联系，而且更为重要的是，研究线性空间的向量之间的各种各样的联系，这种联系就反映为线性空间的变换。线性变换是一种最简单的同时又是一种最基本的变换，它是解析几何中的坐标变换、数学分析中的某些变量替换以及别的数学分支中某些类似的变换的抽象、概括及推广，它在理论上和应用上都是十分重要的。

线性变换是线性代数学的一个主要研究对象，是线性代数学的重要内容，就一定意义上说，处于中心的地位。线性变换的理论，在代数学自身、数学的其它分支、其它自然科学、工程技术领域、经济学及社会科学领域，均有重要的广泛的应用。

我们主要研究有限维线性空间的线性变换。 n 维线性空间的线性变换与 n 阶矩阵不仅有密切的关系，而且就一定意义上可以说，二者是等同的。本章的中心问题就是线性变换及其矩阵表示。线性变换与矩阵的对应与转化，则是本章研究问题的基本方法，也是本章的特色。从而，就使我们进一步看到，矩阵不仅是线性代数学的工具，也是线性代数学的主要研究对象，线性代数学又称为“矩阵论”。

本章的内容分为四个部分：线性变换及其运算，线性变换与矩阵，相似矩阵、特征值与特征向量，线性变换的矩阵的化简。

线性空间 V 的线性变换 σ 是 V 的保持线性运算的变换。对于线性变换这种新的研究对象，要定义其加法、数乘、乘法等运算，还要研究线性变换的值域与核。

线性变换是很抽象的概念，为了进行研究，就要设法具体地表现出来。决定一个线性变换就是要决定每一个向量在其下的象，对于 n 维线性空间而言，由一组基的象完全决定，对一组基的象进行数量刻划，即把一组基的象用该组基线性表出，就可以得到一个 n 阶矩阵，称为线性变换在该组基下的矩阵。

研究线性变换在不同基下的矩阵间的关系，引入了矩阵相似的概念。矩阵的相似与矩阵的等价、合同比起来，更为重要。

线性变换用矩阵表示，自然地，矩阵越简单，刻划线性变换越方便。最简单的矩阵莫过于对角形的矩阵，在对角形矩阵的情况下，基向量 ε 在线性变换 σ 之下变为 $\lambda\varepsilon$ ， $\sigma(\varepsilon)=\lambda\varepsilon$ ，即乘一个数，这就引入了特征值与特征向量的概念。目前，这些概念已广泛应用于数学的其它分支，如微分方程、积分方程和泛函分析中，应用于振动理论、理论物理和量子力学中，应用于经济学和其它社会科学中。特征值与特征向量的概念也可以由下面的渠道引入：1) 数乘变换，2) 一维不变子空间。总之，正是从这种简单化 $\sigma(\varepsilon)=\lambda\varepsilon$ 的考虑，引入了如此重要且内容如此丰富的特征值与特征向量的概念。特征值的最简单的应用，是解析几何中化二次曲面的方程为标准形。

线性变换的矩阵的化简，不仅是本章的中心，而且是线性代数学的其它部分，如 λ -矩阵、欧氏空间等的研究中心。本章解决了相似对角化的问题，对于准对角形的情况给出了必要充分条件，对于若当标准形作了介绍。

本章的补充资料是：线性映射，根子空间，极小多项式，商空间的诱导变换，二阶三阶矩阵的若当形，幂零矩阵的标准形式，特征值的计算与估计，历史资料点滴。

§2 内容提要

I 线性变换及其运算

一 定义与性质

设 V 是数域 F 上的线性空间, σ 是 V 的变换. 若对于 V 中的任意向量 α, β , F 中的任意数 k , 均成立: 1) $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$, 2) $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$, 则称 σ 是线性空间 V 的一个线性变换 (常称 σ 保持线性运算).

下面是几个重要的线性变换:

1) 零变换 T_0 : $T_0(\alpha) = 0, \forall \alpha \in V$;

2) 单位变换 (恒等变换) T_e : $T_e(\alpha) = \alpha, \forall \alpha \in V$;

3) 由数 $k \in F$ 决定的数乘 (相似、位似) 变换 T_k :

$$T_k(\alpha) = k\alpha, \forall \alpha \in V;$$

4) 射影变换 $T_{P(W)}$: $V = W \oplus U, \alpha \in V$, 有唯一的分解式 $\alpha = \beta + \gamma, \beta \in W, \gamma \in U, T_{P(W)}(\alpha) = \beta$.

线性变换 σ 具有性质: 1) $\sigma(0) = 0$; 2) $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$; 3) σ 保持线性组合不变; 4) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_s)$ 线性相关, 但反之不然; 5) 若 W 是 V 的子空间, 则 $\sigma(W) = \{\sigma(\alpha) | \alpha \in W\}$ 与 $\sigma^{-1}(W) = \{\beta | \beta \in V \text{ 且 } \sigma(\beta) \in W\}$ 都是 V 的子空间.

设 V 是数域 F 上的线性空间, σ 是 V 的变换, 则 σ 是线性变换 \Leftrightarrow 对于 V 中的任意向量 α, β 与 F 中的任意数 k, l , 均成立 $\sigma(k\alpha + l\beta) = k\sigma(\alpha) + l\sigma(\beta)$.

设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换, 则 σ 由其对于 V 的一组基的作用完全确定. 即, 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, σ, τ 是 V 的两个线性变换, 且 $\sigma(\varepsilon_i) = \tau(\varepsilon_i), i = 1, 2, \dots, n$, 则 $\sigma(\alpha) = \tau(\alpha)$ 对于 V 中任意向量 α 均成立, 就是说 $\sigma = \tau$.

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的任意 n 个向量, 则存在 V 的唯一的线性变换 σ , 使得 $\sigma(\varepsilon_i) = \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$.

二 运算

1 加法

定义. 若 σ, τ 是线性空间 V 的变换, 则

1) $\sigma + \tau$: $(\sigma + \tau)(\alpha) = \sigma(\alpha) + \tau(\alpha)$, $\forall \alpha \in V$, 称为 σ 与 τ 的和;

2) $-\sigma$: $(-\sigma)(\alpha) = -\sigma(\alpha)$, $\forall \alpha \in V$, 称为 σ 的负变换;

3) $\sigma - \tau = \sigma + (-\tau)$, 称为 σ 与 τ 的差.

性质. 对于 V 中的任意变换 σ, τ, ψ , 均成立:

1) $\sigma + \tau = \tau + \sigma$; 2) $(\sigma + \tau) + \psi = \sigma + (\tau + \psi)$;

3) $\sigma + (-\sigma) = T_0$; 4) $\sigma + T_0 = \sigma$.

定理. 若 σ, τ 是 V 的线性变换, 则 $\sigma + \tau$ 也是 V 的线性变换, $-\sigma, \sigma - \tau$ 同样也是 V 的线性变换. 从而, 线性变换的加法具有性质1)–4).

2 数量乘法

定义. 若 σ 是线性空间 V 的变换, k 是 \mathbf{F} 中的数, 则 $k\sigma$: $(k\sigma)(\alpha) = k\sigma(\alpha)$, $\forall \alpha \in V$, 称为 k 与 σ 的数量乘积.

性质. 对于 V 的任意变换 σ, τ , \mathbf{F} 中的任意数 k, l , 均成立:

5) $(k+l)\sigma = k\sigma + l\sigma$; 6) $k(\sigma + \tau) = k\sigma + k\tau$;

7) $k(l\sigma) = (kl)\sigma$; 8) $1\sigma = \sigma$.

定理. 若 σ 是 V 的线性变换, k 是 \mathbf{F} 中的数, 则 $k\sigma$ 也是 V 的线性变换. 从而, 线性变换的数量乘法具有性质5)–8).

3 乘法

定义. 若 σ, τ 是线性空间 V 的变换, 则 $\tau\sigma$: $(\tau\sigma)(\alpha) = \tau(\sigma(\alpha))$, $\forall \alpha \in V$, 称为 σ 与 τ 的乘积.

性质. 对于 V 的任意变换 σ, τ, ψ , \mathbf{F} 中的任意数 k , 有

9) $(\sigma\tau)\psi = \sigma(\tau\psi)$; 10) $T_e\sigma = \sigma T_e = \sigma$;

11) $T_0\sigma = \sigma T_0 = T_0$; 12) $k(\sigma\tau) = (k\sigma)\tau = \sigma(k\tau)$;

13) $(\tau + \psi)\sigma = \tau\sigma + \psi\sigma$; 14) $\sigma\tau \neq \tau\sigma$;

15) $\sigma\tau = T_0$ 不能推出 $\sigma = T_0$ 或 $\tau = T_0$;

16) $\sigma\tau = \sigma\psi, \sigma \neq T_e$ 不能推出 $\tau = \psi$.

定理. 若 σ, τ 是 V 的线性变换, 则 $\tau\sigma$ 是 V 的线性变换. 从而, 线性变换的乘法具有性质 9)–16). 此外, 还具有性质:

13') $\sigma(\tau + \psi) = \sigma\tau + \sigma\psi$.

4 逆变换

定义. 设 σ 是线性空间 V 的变换. 若存在 V 的变换 τ , 使得 $\sigma\tau = \tau\sigma = T_e$, 则称 σ 是 V 的可逆变换, 称 τ 是 σ 的一个逆变换.

性质. 17) 若 σ 是 V 的可逆变换, 则 σ 的逆变换唯一, 记作 σ^{-1} , 从而 $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = T_e$;

18) σ 是 V 的可逆变换 $\Leftrightarrow \sigma$ 是 V 到 V 的双射; τ 是 σ 的一个逆变换 \Leftrightarrow 任意 $\beta \in V$, 当 $\sigma(\alpha) = \beta$ 时, 有 $\tau(\beta) = \alpha$.

定理. 若 σ 是 V 的线性变换, 且 σ 是可逆变换, 则 σ 的逆变换也是线性变换. 从而, 可逆线性变换具有性质 17) 与 18). 此外, 还具有性质 19) 与 20):

19) σ 是 V 的一个可逆线性变换 $\Leftrightarrow \sigma$ 是 V 到自身的一个同构映射; 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基, σ 是 V 的线性变换, 则 σ 是可逆的 $\Leftrightarrow \sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \dots, \sigma(\varepsilon_n)$ 线性无关.

20) 若 σ 是有限维线性空间 V 的线性变换, 则 σ 将 V 中线性无关的向量组变为线性无关的向量组 $\Leftrightarrow \sigma$ 是可逆的.

5 方幂

定义. 设 n 是正整数, σ 是线性空间 V 的变换, 则 n 个 σ 的积 $\sigma\sigma\cdots\sigma$ 称为 σ 的 n 次幂, 记作 σ^n . 又, $\sigma^0 = T_e$. 当 σ 是可逆变换时, $\sigma^{-n} = (\sigma^{-1})^n$.

性质. 21) $\sigma^m\sigma^n = \sigma^{m+n}$;

22) $(\sigma^m)^n = \sigma^{mn}$; 23) $(\sigma\tau)^n \neq \sigma^n\tau^n$.

当 σ, τ 为 V 的任意变换时, m, n 为非负整数; 当 σ, τ 为可逆变换时, m, n 为任意整数.

定理. 若 σ 是 V 的线性变换, 则 σ 的方幂也是 V 的线性变换,

从而, 线性变换的方幂具有性质21)–23).

6 多项式

定义. 设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{F}[x]$, σ 是线性空间 V 的变换, 则 $f(\sigma) = a_m \sigma^m + a_{m-1} \sigma^{m-1} + \cdots + a_1 \sigma + a_0 T_e$ 是 V 的一个变换, 称为变换 σ 的多项式.

性质. 24) 设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbf{F}[x]$, σ 是 V 的变换. 若 $h(x) = f(x) + g(x)$, 则 $h(\sigma) = f(\sigma) + g(\sigma)$.

定理. 线性变换的多项式是线性变换. 从而, 具有性质24). 此外, 还具有性质: 24') 设 $f(x), g(x), l(x) \in \mathbf{F}[x]$, σ 是 V 的线性变换. 若 $l(x) = f(x)g(x)$, 则 $l(\sigma) = f(\sigma)g(\sigma)$. 特别地, $f(\sigma)g(\sigma) = g(\sigma)f(\sigma)$.

线性变换之间的一些关系, 可以通过线性变换的运算表示出来.

三 $T(V(\mathbf{F}))$ 与 $LT(V(\mathbf{F}))$

定义. 设 V 是数域 \mathbf{F} 上的线性空间, 则 V 的全体变换的集合记为 $T(V(\mathbf{F}))$, V 的全体线性变换的集合记为 $LT(V(\mathbf{F}))$. 当 V 是数域 \mathbf{F} 上的 n 维线性空间时, V 的全体线性变换的集合记为 $LT(V(\mathbf{F}, n))$.

定理. 若 V 是数域 \mathbf{F} 上的线性空间, 则 $T(V(\mathbf{F}))$ 对于变换的加法与数量乘法作成 \mathbf{F} 上的线性空间, $LT(V(\mathbf{F}))$ 亦然.

定理. 若 V 是数域 \mathbf{F} 上的 n 维线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 则

1) $LT(V(\mathbf{F}, n))$ 对于加法与数量乘法作成 \mathbf{F} 上的 n^2 维线性空间;

$$2) \sigma_{ij}(\varepsilon_k) = \begin{cases} \varepsilon_j, & k=i \\ 0, & k \neq i \end{cases}, \quad k=1, 2, \dots, n, (i, j=1, 2, \dots, n)$$

是线性空间 $LT(V(\mathbf{F}, n))$ 的一组基.

四 值域与核

定义. 设 σ 是线性空间 V 的线性变换, 则 $\sigma(V)$ 称为 σ 的 值域 (象), $\sigma^{-1}(0) = \{\alpha \mid \alpha \in V \text{ 且 } \sigma(\alpha) = 0\}$ 称为 σ 的核(胞).

定理. 若 σ 是线性空间 V 的线性变换, 则

1) $\sigma(V)$ 与 $\sigma^{-1}(0)$ 均为 V 的子空间;

2) 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 则 $\sigma(V) = L(\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \dots, \sigma(\varepsilon_n))$, 从而, $\dim(\sigma(V))$ 等于向量组 $\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \dots, \sigma(\varepsilon_n)$ 的秩.

定义. 若 σ 是有限维线性空间 V 的线性变换, 则 $\dim(\sigma(V))$ 称为 σ 的秩, $\dim(\sigma^{-1}(0))$ 称为 σ 的零度.

定理. 若 σ 是有限维线性空间 V 的线性变换, 则, 1) σ 的秩 + σ 的零度 = $\dim V$; 2) σ 是双射 $\Leftrightarrow \sigma$ 是单射 $\Leftrightarrow \sigma$ 是满射.

II 线性变换与矩阵

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, σ 是 V 的线性变换. 若基向量的象表示为

[illegible]

用矩阵表示为

$$\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \dots, \sigma(\varepsilon_n)) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)A$$

[illegible]

则称 A 是 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵.

对于线性空间 V 的任意一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, V 的任一线性变换 σ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵 A 存在且唯一, 并且 σ 的秩等于 A 的秩. 不同的线性变换在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵也不同.

若任意选定线性空间 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 则对于任一给定的 $A \in M_n(\mathbf{F})$, 相应存在唯一的 $\sigma \in LT(V(\mathbf{F}, n))$, 使得 σ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 A .

设 V 是数域 \mathbf{F} 上的 n 维线性空间, 则存在 $LT(V(\mathbf{F}, n))$ 到 $M_n(\mathbf{F})$ 的双射, 且保持运算 (加法、数乘、乘法、逆变换等). 具体地, 作 $\Phi: LT(V(\mathbf{F}, n)) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$, 取定 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 对于 $\sigma \in LT(V(\mathbf{F}, n))$, $\Phi(\sigma) = A$, 其中 A 是 σ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵, 则 Φ 是双射. 并且, 又设 $\tau \in LT(V(\mathbf{F}, n))$, $\Phi(\tau) = B$, 有 1) $\Phi(T_0) = 0$; 2) $\Phi(T_e) = E$; 3) $\Phi(T_k) = kE$; 4) $\Phi(\sigma + \tau) = A + B$; 5) $\Phi(\sigma\tau) = AB$; 6) $\Phi(k\sigma) = kA$; 7) σ 可逆 $\Leftrightarrow A$ 可逆, 且 $\Phi(\sigma^{-1}) = A^{-1}$. 从而, Φ 是线性空间 $LT(V(\mathbf{F}, n))$ 到线性空间 $M_n(\mathbf{F})$ 的同构映射, 从而 $LT(V(\mathbf{F}, n)) \stackrel{\Phi}{\cong} M_n(\mathbf{F})$.

设 V 的线性变换 σ 在 V 的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵是 A , $\alpha \in V$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标是 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 则 $\sigma(\alpha)$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标 (y_1, y_2, \dots, y_n) 按公式 $(y_1, y_2, \dots, y_n)' = A(x_1, x_2, \dots, x_n)'$ 计算. 从而, $\sigma(\alpha)$ 表示为

$$\sigma(\alpha) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) A (x_1, x_2, \dots, x_n)'.$$

若线性变换 σ 在 V 的两组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 与 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 下的矩阵分别是 A 与 B , 且 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的过渡矩阵是 X , 则 $B = X^{-1} A X$. 反之, 若有 $B = X^{-1} A X$, 则 A 与 B 分别为 V 的同一线性变换 σ 在 V 的两组基下的矩阵, 而 X 是由其中一组基到另一组基的过渡矩阵.

II 矩阵相似、特征值与特征向量

一 矩阵相似

设 $A, B \in M_n(\mathbf{F})$. 若有可逆矩阵 $X \in M_n(\mathbf{F})$, 使得 $B = X^{-1} A X$, 则称 A 相似于 B , 记作 $A \sim B$.

矩阵相似具有下列性质: 1) 矩阵相似具有反身性、对称性、传递性; 2) 若 $B_1 = X^{-1} A_1 X$, $B_2 = X^{-1} A_2 X$, 则 $B_1 + B_2$

$=X^{-1}(A_1+A_2)X, B_1B_2=X^{-1}(A_1A_2)X$; 3) 若 $B=X^{-1}AX$, 则 $B^m=X^{-1}A^mX, f(B)=X^{-1}f(A)X$; 4) 若 $A\sim B$, 则 $\text{秩}(A)=\text{秩}(B)$; 5) 若 $A\sim B$, 则 $|A|=|B|$.

应用矩阵相似的概念, 第Ⅱ部分中最后的结论可以表述为: 同一线性变换在不同基下的矩阵是相似的; 反过来, 若两个矩阵相似, 则它们可以看作同一线性变换在两组基下的矩阵.

二 矩阵的特征多项式

设有数域 F 上的 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

λ 是一个文字, 则

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的特征矩阵, 行列式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 A 的特征多项式, 记作 $f_A(\lambda)$.

n 阶矩阵 A 的主对角线上元素之和称为 A 的迹 或 追 迹, 记作 $\text{Tr}(A)$.

n 阶矩阵 A 的特征多项式 $f_A(\lambda)$ 是数域 F 上的 n 次多项式, 且 $f_A(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$, λ^{n-1} 的系数是 $-\text{Tr}(A)$, 常数项是 $(-1)^n |A|$.

对于任意 n 阶矩阵 A , A 与 A' 有相同的特征多项式, 即 $f_A(\lambda) = f_{A'}(\lambda)$. 对于任意 n 阶矩阵 A 与 B , AB 与 BA 有相同的特征多项式, 即 $f_{AB}(\lambda) = f_{BA}(\lambda)$. 相似矩阵有相同的特征多项式、相同的迹.

哈密尔顿-凯莱定理. 若 $f_A(\lambda)$ 是 n 阶矩阵 A 的特征多项式, 则 $f_A(A) = 0$.

三 矩阵的特征值与特征向量

设 $A \in M_n(F)$. 若对于 $\lambda_0 \in F$, 存在 $\xi \in F^n$, $\xi \neq 0$, 使得 $A\xi = \lambda_0\xi$, 则称 λ_0 是 A 的一个特征值, 称 ξ 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量.

若 ξ 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量, 则对于任意的 $k \in F$, $k \neq 0$, $k\xi$ 也是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量, 从而, 一个特征值有无穷多个特征向量, 特征向量不是被特征值唯一决定的. 但是, 一个特征向量只能属于一个特征值, 从而, 特征值被特征向量唯一确定.

λ_0 是 A 的特征值, ξ 是 A 的属于 λ_0 的特征向量 $\Leftrightarrow \lambda_0$ 是 A 的特征多项式 $f_A(\lambda)$ 在 F 中的根, ξ 是齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的非零解.

若 n 阶矩阵 A 在 F 中有 n 个特征值(重特征值按重数计算), 则 A 的所有特征值的和等于 A 的迹, 所有特征值的积等于 A 的行列式 $|A|$.

关于 n 阶矩阵的特征值, 有下列结论: 1) A 与 A' 有相同的特征值; 2) AB 与 BA 有相同的特征值; 3) 0 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |A| = 0$; 4) 零矩阵有 n 重特征值 0 ; 5) 单位矩阵有 n 重特征值 1 ; 6) 数量矩阵 kE 有 n 重特征值 k ; 7) 幂零矩阵有 n 重特征值 0 ; 8) 幂等矩阵($A^2 = A$)的特征值只可能是 0 或 1 ; 9) 对合矩阵($A^2 = E$)的特征值只可能是 1 或 -1 ; 10) 么幂矩阵($A^k = E$)的特征值只可能

是1的 k 次方根；11) 设 $g(x)$ 是数域 F 上的任意多项式， A 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则 $g(A)$ 的特征值是 $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \dots, g(\lambda_n)$ ；12) 若 λ_0 是可逆矩阵 A 的一个特征值，则 $\lambda_0 \neq 0$ ，且 λ_0^{-1} 是 A^{-1} 的一个特征值。

四 矩阵相似于对角形

若 $A \sim \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ，则 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的所有特征值（重特征值按重数计算）。 n 阶矩阵 A 相似于对角形矩阵 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量。

IV 线性变换的矩阵的化简

一 不变子空间

设 V 是数域 F 上的线性空间， σ 是 V 的线性变换， W 是 V 的子空间。若 $\sigma(W) \subseteq W$ ，即，对于 W 中的任意向量 α ，有 $\sigma(\alpha) \in W$ ，则称 W 是 σ 的不变子空间，简称 σ -子空间。

关于不变子空间，有下列结论：1) V 及 $\{0\}$ 是任意线性变换 σ 的不变子空间；2) $\sigma(V)$ 与 $\sigma^{-1}(0)$ 均是 σ -子空间；3) V 的任一子空间 W 都是数乘变换 T_k 的不变子空间；4) σ 的有限(无限)个不变子空间的交是 σ 的不变子空间；5) σ 的有限个不变子空间的和是 σ 的不变子空间；6) 若 W 是 σ -子空间，则 $\sigma(W)$ 与 $\sigma^{-1}(W)$ 都是 σ -子空间；7) 若 $\sigma\tau = \tau\sigma$ ，则 $\sigma(V)$ 与 $\sigma^{-1}(0)$ 是 τ -子空间， $\tau(V)$ 与 $\tau^{-1}(0)$ 是 σ -子空间；8) $f(\sigma)(V)$ 与 $(f(\sigma))^{-1}(0)$ 是 σ -子空间；9) 设 W 是有限维线性空间 V 的子空间， σ 是 V 的可逆线性变换， W 是 σ -子空间，则 W 是 σ^{-1} 的不变子空间；10) 若 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ ，则 W 是 σ -子空间 $\Leftrightarrow \sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_s) \in W$ ；11) 设 σ 是数域 F 上的线性空间 V 的线性变换，则 V 有一维 σ -子空间 \Leftrightarrow 存在 $\lambda_0 \in F$ ，及 $\xi \in V$ ， $\xi \neq 0$ ，使得 $\sigma(\xi) = \lambda_0 \xi$ 。

若 W 是 σ -子空间，则

$$\sigma|W: (\sigma|W)(\alpha) = \sigma(\alpha), \quad \forall \alpha \in W,$$

是 W 的一个线性变换。称 $\sigma|W$ 是 σ 在 W 上引起的变换，或称将 σ

限制在 W 上. 例如, $\sigma|_{\sigma^{-1}(0)} = T_0$.

σ 与 $\sigma|_W$ 的区别在于: σ 作用于 V 上, 而 $\sigma|_W$ 仅作用于 W 上, 对于 $\beta \in V$ 但 $\beta \notin W$, $(\sigma|_W)(\beta)$ 是无意义的.

对于线性变换的矩阵的化简而言, 不变子空间的作用, 体现于下面的三条结论:

1) 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换, 则存在非平凡的 σ -子空间 $W \Leftrightarrow \sigma$ 在 V 的一组基下的矩阵有形状 $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, 此时, $\sigma|_W$ 在 W 的某组基下的矩阵就是 A_1 .

2) 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换, 则存在非平凡的 σ -子空间 W_1, W_2, \dots, W_s 且 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s \Leftrightarrow \sigma$ 在 V 的一组基下的矩阵是准对角形 $[A_1, A_2, \dots, A_s]$. 此时, $\sigma|_{W_i}$ 在 W_i 的某组基下的矩阵就是 A_i , $i = 1, 2, \dots, s$.

3) 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换, 则 V 是 n 个一维 σ -子空间的直和 $\Leftrightarrow \sigma$ 在 V 的一组基下的矩阵是对角形.

二 特征值与特征向量

1 特征多项式

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, σ 是 V 的线性变换. 若 σ 在 V 的一组基 e_1, e_2, \dots, e_n 下的矩阵是 A , 则 A 的特征多项式就称为 σ 的特征多项式, 记作 $f_\sigma(\lambda)$, $|A|$ 就称 σ 的行列式.

σ 的特征多项式、行列式均与基的选取无关, 均是由 σ 自身唯一决定的.

哈密尔顿-凯莱定理. 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换. 若 $f_\sigma(\lambda)$ 是 σ 的特征多项式, 则 $f_\sigma(\sigma) = T_0$.

2 特征值与特征向量

设 V 是数域 F 上的线性空间, σ 是 V 的线性变换. 若对于 F 中的数 λ_0 , 存在非零向量 $\xi \in V$, 使得 $\sigma(\xi) = \lambda_0 \xi$, 则称 λ_0 是 σ 的一个特征值, 称 ξ 是 σ 的属于特征值 λ_0 的特征向量.

特征值与特征向量有如下性质：1) 若 ξ 是 σ 的属于 λ_0 的特征向量，则对于 F 中任意非零数 k ， $k\xi$ 也是 σ 的属于特征值 λ_0 的特征向量。从而，属于同一个特征值的特征向量有无穷多个，特征向量不是由特征值唯一决定的。2) 若 $\lambda_0, \mu_0 \in F$ ， $\lambda_0 \neq \mu_0$ ，则 $\xi \in V$ ， $\xi \neq 0$ ，不能既是 σ 的属于特征值 λ_0 的特征向量，又是 σ 的属于特征值 μ_0 的特征向量。从而，一个特征向量只能属于一个特征值，特征值被特征向量唯一决定。3) 设 $g(x)$ 是数域 F 上的任意多项式。若 ξ 是 σ 的属于 λ_0 的特征向量，则 ξ 也是 $g(\sigma)$ 的属于 $g(\lambda_0)$ 的特征向量。4) 若 σ 是可逆线性变换，则0不是 σ 的特征值。5) 零变换 T_0 的特征值是且只能是0，且任一非零向量均是 T_0 的属于特征值0的特征向量。6) 单位变换 T_e 的特征值是且只能是1，且任一非零向量均是 T_e 的属于特征值1的特征向量。7) 数乘变换 T_k 的特征值是且只能是 k ，且任一非零向量均是 T_k 的属于特征值 k 的特征向量。8) 若 λ_0 是可逆线性变换 σ 的一个特征值，则 $\lambda_0 \neq 0$ ，且 λ_0^{-1} 是 σ^{-1} 的一个特征值。

对于数域 F 上的线性空间 V 的线性变换 σ 而言， σ 的特征值与特征向量，是十分抽象的，一般难于直接求出。但是，对于 n 维线性空间 V 的线性变换而言，却可以与 n 阶矩阵联系起来，从而，使问题变得具体且可以解决。

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间， $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基， σ 是 V 的线性变换。若 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵是 A ， $\lambda_0 \in F$ ， $\xi \in V$ ， $\xi \neq 0$ ，则：

1) λ_0 是 σ 的特征值 $\Leftrightarrow \lambda_0$ 是 A 的特征值，即， λ_0 是特征多项式 $|\lambda E - A|$ 在数域 F 中的一个根；

2) $\xi = \sum_{i=1}^n k_i \varepsilon_i$ 是 σ 的属于特征值 λ_0 的特征向量 $\Leftrightarrow (k_1, k_1, \dots, k_n)'$ 是齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的非零解；

3) 若 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的一个基础解系是 η_1, η_2, \dots ，

η_{n-r} , r 为矩阵 $\lambda_0 E - A$ 的秩, 而 $\eta_t = (a_{1t}, a_{2t}, \dots, a_{nt})'$,

则 $\xi_t = \sum_{i=1}^n a_{it} \varepsilon_i (t=1, 2, \dots, n-r)$ 是 σ 的属于特征值 λ_0 的

$n-r$ 个(最大个数)线性无关的特征向量, 且 σ 的属于特征值 λ_0

的任一特征向量 ξ 为 $\xi = \sum_{i=1}^{n-r} l_i \xi_i$, 其中 l_1, l_2, \dots, l_{n-r} 是 F

中的任一组不全为零的数;

4) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是 σ 的特征向量 $\Leftrightarrow \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标 $(\xi_1), (\xi_2), \dots, (\xi_s)$ 是 A 的特征向量, 而且 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow (\xi_1), (\xi_2), \dots, (\xi_s)$ 线性无关.

求线性变换 σ 的所有特征值与特征向量, 可以按下列步骤进行:

1) 选定 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 求 σ 在该组基下的矩阵 A ;

2) 计算特征多项式 $f_\sigma(\lambda) = |\lambda E - A|$, 并求 $f_\sigma(\lambda)$ 在数域 F 中的根

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$; 3) 对于每个 λ_i , 求齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$

的一个基础解系 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{r_i}$, $\eta_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})'$, $\eta_2 =$

$(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})'$, \dots , $\eta_{r_i} = (a_{r_i 1}, a_{r_i 2}, \dots, a_{r_i n})'$, 则 ξ_1

$= \sum_{j=1}^n a_{1j} \varepsilon_j$, $\xi_2 = \sum_{j=1}^n a_{2j} \varepsilon_j$, \dots , $\xi_{r_i} = \sum_{j=1}^n a_{r_i j} \varepsilon_j$ 就是 σ 的属于

λ_i 的 r_i 个(最大个数)线性无关的特征向量, 其中 $r_i = n - \text{秩}(\lambda_i E$

$- A)$, σ 的属于 λ_i 的所有特征向量是 $\sum_{u=1}^{r_i} l_u \xi_u$, 其中 $l_1, l_2, \dots,$

l_{r_i} 是 F 中的一组不全为零的数.

3 特征子空间

设 V 是数域 F 上的线性空间, σ 是 V 的线性变换, 则对于 F 中的数 λ_0 , $V_{\lambda_0} = \{\alpha \mid \alpha \in V \text{ 且 } \sigma(\alpha) = \lambda_0 \alpha\}$ 是 V 的子空间.

当 λ_0 是 σ 的特征值时, 称 V_{λ_0} 是 σ 的属于特征值 λ_0 的特征子

空间。此时， V_{λ_0} 由 σ 的属于 λ_0 的一切特征向量及零向量组成。而当 λ_0 不是 σ 的特征值时， $V_{\lambda_0} = \{0\}$ 。

对于 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 而言，特征子空间 V_{λ_0} 的维数等于 $n - \text{秩}(\lambda_0 E - A)$ ，其中 A 是 σ 在一组基下的矩阵，即， V_{λ_0} 的维数等于属于 λ_0 的线性无关的特征向量的最大个数。

σ 的特征子空间是 σ 的不变子空间，且 $\sigma|_{V_{\lambda_0}} = T_{\lambda_0}$ 。

关于线性无关的特征向量，有下列两个结论：

- 1) 属于不同特征值的特征向量线性无关。
- 2) 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 是线性变换 σ 的互不相同的特征值，而 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir_i}$ 是属于 λ_i 的线性无关的特征向量， $i=1, 2, \dots, k$ ，则向量组 $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1r_1}, \dots, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kr_k}$ 也线性无关。

于是，我们得到：若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 是 σ 的互不相同的特征值，则特征子空间的和 $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_k}$ 是直和。

对于有限维线性空间而言，线性变换 σ 的特征子空间 V_{λ_0} 的维数不能大于 λ_0 作为 $f_\sigma(\lambda)$ 在 F 中的根的重数。

4 V 按特征值分解为不变子空间的直和

一般来讲， V 不能分解为特征子空间的直和，但却可以作如下的分解：设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间， σ 是 V 的线性变换。若 σ 的特征多项式在 F 上可分解为

$$f_\sigma(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{r_s},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 互不相同，则 V 可分解为 σ 的不变子空间的直和 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$ ，其中

$$V_i = \{\xi \mid \xi \in V, \text{ 且 } (\sigma - \lambda_i T_\sigma)^{r_i}(\xi) = 0\}.$$

三 对角形

设 σ 是数域 F 上的 n 维线性空间 V 的线性变换。下面给出 σ 在 V 的一组基下的矩阵是对角形的条件。

若 σ 在一组基下的矩阵是对角形，则 σ 有 n 个特征值（重特征

值按重数计算), 而且, 矩阵的主对角线上的数就是 σ 的全部特征值.

σ 在一组基下的矩阵是对角形 $\Leftrightarrow \sigma$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\Leftrightarrow V$ 可以分解为 n 个一维 σ -子空间的直和.

若 σ 的特征多项式的全部互不相同的根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 都属于 \mathbf{F} , 则 σ 在一组基下的矩阵是对角形 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^s \dim(V_{\lambda_i}) = n \Leftrightarrow V$ 是 σ 的全部特征子空间的直和 $\Leftrightarrow \dim(V_{\lambda_i}) = \lambda_i$ 的重数, $i=1, 2, \dots, s \Leftrightarrow \sum_{i=1}^s \text{秩}(\lambda_i E - A) = n(s-1)$.

若 σ 的特征多项式 $f_\sigma(\lambda)$ 在 \mathbf{F} 中有 n 个互不相同的根, 则必有 V 的一组基, σ 在该组基下的矩阵是对角形.

若 σ 在某组基下的矩阵是对角形, 则可以按如下方法求出该组基及对角形: 1) 取定 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 求出 σ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵 A ; 2) 求出 A 的特征多项式的 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 再求属于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的 A 的 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; 3) 分别以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列作矩阵 $X = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 求得 V 的另一组基 $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)X$; 4) σ 在基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 下的矩阵是 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, η_i 是属于 λ_i 的 σ 的特征向量.

四 若当形

设 λ_0 是复数, 则形式为

$$J(\lambda_0, t) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}_t$$

的 t 阶矩阵称为若当块.

设 V 是复数域 \mathbf{C} 上的 n 维线性空间, σ 是 V 的线性变换, 则 σ 在

V 的某一组基下的矩阵是由若干个若当块组成的准对角形矩阵，称为若当形矩阵，并且，除去若当块的排列次序外，该若当形矩阵由 σ 唯一决定，称为 σ 的若当标准形。

若当标准形的理论推导及具体求法，将在下一章中解决。但是，基的确定较为复杂，需经专门的计算。

在线性变换 σ 的若当标准形中，主对角线上的元素是 σ 的特征多项式 $f_{\sigma}(\lambda)$ 的全部根（重根按重数计算）。

§3 重点难点

本章的主题词是：线性变换，零变换，单位变换（恒等变换），数乘（相似、位似）变换，射影变换，线性变换的和，线性变换的积，线性变换的多项式，线性变换的值域（象），线性变换的核（核），线性变换的秩，线性变换的零度；线性变换的矩阵，矩阵相似，特征矩阵，矩阵的特征多项式，矩阵的特征值，矩阵的特征向量，矩阵的迹（迹），哈密尔顿-凯莱定理；不变子空间，线性变换在子空间上的限制，线性变换的特征多项式，线性变换的行列式，线性变换的特征值，线性变换的特征向量，特征子空间，可对角化，若当块，若当标准形。

本章的基本方法是：线性变换的判定方法，线性变换的值域的求法，线性变换的核的求法，线性变换的矩阵的求法，换基求矩阵法，矩阵相似的判定方法，不变子空间的判定方法，特征多项式的求法，特征值与特征向量求法，对角化方法。

本章的重点是：线性变换的矩阵与矩阵相似，特征值与特征向量，线性变换的矩阵可以对角化的条件与方法。

线性变换在一组基下的矩阵，或简单地说，线性变换的矩阵，直接贯穿于全章的大部分内容中，而且线性变换的矩阵的化简，是我们追求的目标与研究的中心。线性变换的矩阵给 n 维线性空间的线性变换以具体的刻画，使线性变换的运算转化为矩阵

的运算，反之，在必要时，也把矩阵的问题转化为线性变换来处理，二者是同一事物的两种表现形式，具有完全相同的代数性质。由 n 维线性空间的线性变换在不同基下的矩阵的关系的问题，引入了矩阵相似的概念，研究矩阵相似是线性代数的一个基本内容，比矩阵等价与矩阵合同更为重要。因此，线性变换的矩阵与矩阵相似，成为本章的一个重点。

特征值与特征向量，是基本的概念与基本的工具，不仅本章中用到，以后还要用，因此，成为本章的一个重点。特征值与特征向量的求法，不仅要掌握，而且要熟练，计算要迅速、准确。特征值与特征向量的各种结论，是研究矩阵化简的理论基础，也必须理解，并能够应用。另外，还要从不同角度认识此概念引入的必要性与合理性。

线性变换的矩阵的化简，是本章的中心，但是，本章仅彻底解决了可以对角化的问题。因此，线性变换的矩阵可以对角化的条件与方法，成为本章的一个重点。要理解并掌握线性变换的矩阵可以对角化的必要条件、必要充分条件和充分条件，对于几个必要充分条件，要认识它们本质上的一致性。另外，还要会具体地求出对角形以及基的过渡矩阵，即掌握对角化的方法。

本章的难点是：特征值与特征向量，不变子空间，哈密尔顿-凯莱定理及其应用。

特征值与特征向量，既是本章的一个重点，又是本章的一个难点，原因在于：1) 概念本身较抽象；2) 不容易讲清引入的背景；3) 计算较复杂，不仅量大，而且所用的知识多；4) 关于不同特征值的特征向量线性无关的结论，证明也较复杂。解决困难的方法是：1) 如§1中所讲过的，要从不同的侧面理解引入概念的必要性 with 合理性；2) 用解析几何的事实作解释，若线性变换 σ 把非零向量 ξ 变为与 ξ 共线的向量 $\lambda_0\xi$ ，则 ξ 就是 σ 的属于特征值 λ_0 的特征向量；3) 用一些较简单的例子来熟悉与理解概念，例如，

利用由数 k 决定的数乘变换 T_k 的属于特征值 k 的特征向量是线性空间中的任一非零向量这一具体模型；4) 复习多项式、行列式、齐次线性方程组、向量的坐标等有关内容，为计算打好基础；5) 线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵是 A ，弄清 σ 与 A 的特征多项式、特征值与特征向量的关系；6) 提出一些简单的思考讨论题。

不变子空间是本章的一个难点，原因在于：1) 关于不变子空间的定义的引入，不容易说明，往往使人感到突然；2) σ 限制在其不变子空间 W 上，得到 $\sigma|W$ ，对于 $\sigma|W$ 与 σ 的联系与区别，不容易理解；3) 不变子空间又往往与一些较困难的概念，如直和、特征值与特征向量等，联系在一起。解决困难的方法是：1) 通过例子，如线性变换的值域与核，理解不变子空间的定义以及 $\sigma|W$ 等；2) 通过后面研究线性变换的矩阵的化简，反过来认识不变子空间的意義；3) 复习线性变换的矩阵、直和等概念，为理解不变子空间概念作准备。

哈密尔顿-凯莱定理及其应用是本章的一个难点，原因在于：1) 哈密尔顿-凯莱定理的内容不易理解，并容易发生误解：因为 $f_A(\lambda) = |\lambda E - A|$ ，所以 $f_A(A) = |AE - A| = 0$ ；2) 哈密尔顿-凯莱定理的证明篇幅较长，而且用到伴随矩阵、矩阵多项式等概念，不容易掌握；3) 应用该定理将线性空间按特征值分解为不变子空间的直和，其证明较困难。解决困难的方法是：1) 复习行列式、伴随矩阵等概念；2) 掌握矩阵系数多项式的概念，并且，能够把以多项式为元素的矩阵写为矩阵系数的多项式；3) 指出， $f_A(A) \neq |AE - A|$ ，左右两边的含义不同，但这一误解可能是激发人们发现该定理的一个因素；4) 复习直和的定义及判定方法，为证明按特征值分解为不变子空间的直和作准备，并且，从整体上将证明分为几个部分，认真研读，一步一步地搞清楚。

§4 习题类解

I 计算题

一 线性变换在指定基下的矩阵

这类问题大体上可以分为三种类型：1) $\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \dots, \sigma(\varepsilon_n)$ 用 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表出，而后由定义直接写出；2) 用过渡矩阵 X 及相似关系 $X^{-1} \Lambda X$ ；3) 引入第三组基，使所给的两组基均与其发生关系。

例 1 在 $M_2(\mathbf{F})$ 中定义线性变换 σ ：

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X.$$

试求 σ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵。

解 因为

$$\sigma(E_{11}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{11} + cE_{21},$$

$$\sigma(E_{12}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = aE_{12} + cE_{22},$$

$$\sigma(E_{21}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = bE_{11} + dE_{21},$$

$$\sigma(E_{22}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = bE_{12} + dE_{22},$$

所以， σ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

例 2 已知 \mathbf{F}^3 中的线性变换 σ 在基 $\eta_1 = (-1, 1, 1), \eta_2 = (1, 0, -1), \eta_3 = (0, 1, 1)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

试求 σ 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵.

解 因为

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

所以, η_1, η_2, η_3 到 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的过渡矩阵是

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

因此, σ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵是

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 3 设 σ 是 F^3 的线性变换, $\alpha_1=(-1,0,-2)$, $\alpha_2=(0,1,2)$, $\alpha_3=(1,2,5)$ 是 F^3 的一组基, 且 $\sigma(\alpha_1)=(2,0,-1)$, $\sigma(\alpha_2)=(0,0,1)$, $\sigma(\alpha_3)=(0,1,2)$, 试求 σ 在基 $\beta_1=(-1,1,0)$, $\beta_2=(1,0,1)$, $\beta_3=(0,1,2)$ 下的矩阵.

解 取基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1)$, 则
 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)B$,
 $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)C$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

从而 $\sigma(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A = \sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B^{-1}A$
 $= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)CB^{-1}A = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)A^{-1}CB^{-1}A$. 因此, σ 在基
 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵是

$$A^{-1}CB^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

二 线性变换的值域与核

设 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵是 A , A 的秩为 r . 求出 A 的列向量组 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的一极大无关组 $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \dots, \eta_{i_r}$, 则得到 $\sigma(V) = L(\sigma(\varepsilon_{i_1}), \sigma(\varepsilon_{i_2}), \dots, \sigma(\varepsilon_{i_r}))$. 求出 $AX=0$ 的一基础解系 $\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}, \dots, \{\alpha_{n-r}\}$, 以它们为坐标的向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$, 则得到 $\sigma^{-1}(0) = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r})$. 有时, 利用关系式 σ 的秩 + σ 的零度 = n 来简化计算.

例 4 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是4维线性空间 V 的一组基. 已知 V 的线性变换 σ 在该组基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

试求 σ 的值域与核.

解 在 σ 的核 $\sigma^{-1}(0)$ 中任取一向量 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 + x_4\varepsilon_4$, 则由 $\sigma(\alpha) = 0$ 得

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

求得一基础解系为 $(-4, -3, 2, 0)$, $(-1, -2, 0, 1)$, 从而, $\alpha_1 = -4\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$, $\alpha_2 = -\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4$ 是 $\sigma^{-1}(0)$ 的一组基, 因此, $\sigma^{-1}(0) = L(\alpha_1, \alpha_2)$.

由于 σ 的零度是2, 所以 σ 的秩为2, 即 A 的秩为2. 而 A 的前两列线性无关, 所以, $\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2)$ 是 $\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \sigma(\varepsilon_3), \sigma(\varepsilon_4)$ 的一个极大无关组, 因此, $\sigma(V) = L(\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2))$.

三 特征值与特征向量

按 § 2, IV, 二, 2, 中所列的步骤去做. 在计算特征多项式时, 要设法保留因式, 以利于求根.

例 5 设 σ 是复数域 \mathbf{C} 上的三维线性空间 V 的线性变换. σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

试求 σ 的特征值与特征向量.

解 σ 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$$

所以, σ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$.

解方程组 $(E - A)X = 0$, 得 $x_1 = x_3$, 所以, 一基础解系为 $(1, 0, 1), (0, 1, 0)$, 从而 $\varepsilon_1 + \varepsilon_3$ 与 ε_2 是 σ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量. 而属于 1 的一切特征向量是 $k_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + k_2\varepsilon_2 = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_1\varepsilon_3$, 其中 k_1, k_2 为任一组不全为零的复数.

解方程组 $(-E - A)X = 0$, 得 $x_1 = -x_3, x_2 = 0$, 所以, 一基础解系为 $(1, 0, -1)$, 从而 σ 的属于特征值 -1 的一切特征向量是 $k(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) = k\varepsilon_1 - k\varepsilon_3$, 其中 k 为任意非零复数.

例 6 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3(\lambda + 2),$$

所以, A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$.

解方程组 $(2E - A)X = 0$, 得 $x_1 = x_2 + x_3 + x_4$, 所以, 一基础解系为 $\xi_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\xi_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\xi_3 = (1, 0, 0, 1)$, 从而, A 的属于特征值 2 的一切特征向量是 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$, 其中 k_1, k_2, k_3 为不全为零的数.

解方程组 $(-2E - A)X = 0$, 得 $x_1 = -x_4$, $x_2 = x_3 = x_4$, 所以, 一基础解系为 $\xi = (-1, 1, 1, 1)$, 从而, A 的属于特征值 -2 的一切特征向量是 $k\xi$, k 是不为零的数.

四 对角化

先求出特征值与特征向量, 根据所得到的线性无关的特征向量的个数确定可否对角化. 而在可以对角化时, 以计算过程中所得的基础解系的向量为列, 作成过渡矩阵, 但要注意列与特征值的对应关系.

计算 n 阶矩阵 A 的 k 次幂 A^k . 一般说来, A 相似于某个对角形, 按上面所述, 求得 X , 使 $X^{-1}AX$ 为对角形 D . 由相似矩阵的运算规则, 得到 $X^{-1}A^kX = D^k$, 计算 D^k , 最后求得 $A^k = XD^kX^{-1}$.

例 7 设 σ 为复数域 \mathbb{C} 上三维线性空间 V 的线性变换, σ 在 e_1, e_2, e_3 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

试问, 是否有 V 的一组基, 使 σ 在该组基下的矩阵为对角形? 若有, 试求出该基及对角形.

解 先求 σ 的特征值及线性无关的特征向量.

σ 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 2),$$

所以, σ 的特征值为 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1+\sqrt{3}$, $\lambda_3=1-\sqrt{3}$.

解方程组 $(2E-A)X=0$, 得 $x_1=-2x_2$, $x_3=0$, 所以, 一基础解系为 $(-2, 1, 0)$, 从而, $\eta_1=-2\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 是 σ 的属于特征值 2 的一个特征向量.

解方程组 $((1+\sqrt{3})E-A)X=0$, 得 $x_1=-3x_2$, $x_3=(-2+\sqrt{3})x_2$, 所以, 一基础解系为 $(3, -1, 2-\sqrt{3})$, 从而, $\eta_2=3\varepsilon_1-\varepsilon_2+(2-\sqrt{3})\varepsilon_3$ 是 σ 的属于特征值 $1+\sqrt{3}$ 的一个特征向量.

解方程 $((1-\sqrt{3})E-A)X=0$, 得 $x_1=-3x_2$, $x_3=-(2+\sqrt{3})x_2$, 所以, 一基础解系为 $(3, -1, 2+\sqrt{3})$, 从而, $\eta_3=3\varepsilon_1-\varepsilon_2+(2+\sqrt{3})\varepsilon_3$ 是 σ 的属于特征值 $1-\sqrt{3}$ 的一个特征向量.

因此, σ 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵是对角形 $\{2, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\}$, 基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵是

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

例 8 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A^k .

解 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda+3 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-25),$$

所以, A 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=-5$.

解方程组 $(E-A)X=0$, 得一基础解系 $(1, 0, 0)$.

解方程组 $(5E-A)X=0$, 得一基础解系 $(2, 1, 2)$.

解方程组 $(-5E-A)X=0$, 得一基础解系 $(1, -2, 1)$.

所以, 得矩阵 $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 使得 $X^{-1}AX = \{1, 5, -5\}$,

从而 $X^{-1}A^kX = \{1, 5^k, (-5)^k\}$. 因此,

$$\begin{aligned} A^k &= X\{1, 5^k, (-5)^k\}X^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5^k & \\ & & (-5)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5^k & \\ & & (-5)^k \end{pmatrix} \left[\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2(1+(-1)^{k+1})5^{k-1} & (4+(-1)^k)5^{k-1}-1 \\ 0 & (1+4(-1)^k)5^{k-1} & 2(1+(-1)^{k+1})5^{k-1} \\ 0 & 2(1+(-1)^{k+1})5^{k-1} & (4+(-1)^k)5^{k-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{当 } k \text{ 为偶数时, } A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5^k-1 \\ 0 & 5^k & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{pmatrix};$$

$$\text{当 } k \text{ 为奇数时, } A^k = \begin{pmatrix} 1 & 4 \cdot 5^{k-1} & 3 \cdot 5^{k-1}-1 \\ 0 & -3 \cdot 5^{k-1} & 4 \cdot 5^{k-1} \\ 0 & 4 \cdot 5^{k-1} & 3 \cdot 5^{k-1} \end{pmatrix}.$$

I 证明题

一 线性变换的判定

证明线性空间的变换是线性变换时, 要按定义逐条逐点进行验证; 证明不是线性变换时, 仅需要通过具体向量指出定义中的某一点不成立就可以了.

例 1 证明: $M_n(F)$ 中的变换

$$\sigma: \sigma(X) = \Lambda X - X \Lambda, \quad \forall X \in M_n(F),$$

是线性变换, 其中 Λ 是 $M_n(F)$ 中一固定矩阵.

证明 σ 是 $M_n(\mathbf{F})$ 的变换, 且对于 $X_1, X_2 \in M_n(\mathbf{F}), k \in \mathbf{F}$, 有 $\sigma(X_1 + X_2) = A(X_1 + X_2) - (X_1 + X_2)A = (AX_1 - X_1A) + (AX_2 - X_2A) = \sigma(X_1) + \sigma(X_2)$, $\sigma(kX_1) = A(kX_1) - (kX_1)A = k(AX_1 - X_1A) = k\sigma(X_1)$, 所以 σ 是线性变换.

例 2 证明: \mathbf{R}^2 中的变换 σ :

$$\sigma((a, b)) = \begin{cases} (a, b), & ab \geq 0 \\ (a, -b), & ab < 0, \end{cases}$$

不是 \mathbf{R}^2 的线性变换.

证明 对于 $(-2, -3), (-1, 4) \in \mathbf{R}^2$, $\sigma((-2, -3) + (-1, 4)) = \sigma((-3, 1)) = (-3, -1)$, $\sigma((-2, -3)) + \sigma((-1, 4)) = (-2, -3) + (-1, -4) = (-3, -7)$, $\sigma((-2, -3) + (-1, 4)) \neq \sigma((-2, -3)) + \sigma((-1, 4))$, 所以, σ 不是线性变换.

二 变换的等式

利用已知的等式及各种运算律, 展开化简, 适当变形, 即得到证明; 或者, 根据变换相等的定义, 对任一向量 α , 用等式两端的变换去作用, 而后证明所得的两个象相等.

例 3 设 σ, τ 是线性空间 V 的两个变换, 且 $\sigma^2 = \sigma, \tau^2 = \tau$, 证明: $(\sigma + \tau)^2 = \sigma + \tau \Leftrightarrow \sigma\tau = \tau\sigma = T_0$.

证明 $(\sigma + \tau)^2 = (\sigma + \tau)(\sigma + \tau) = \sigma^2 + \sigma\tau + \tau\sigma + \tau^2 = \sigma + \sigma\tau + \tau\sigma + \tau$.

\Rightarrow . 由 $(\sigma + \tau)^2 = \sigma + \tau$, 得 $\sigma\tau + \tau\sigma = T_0$. (1). (1) 式左乘 τ , 右乘 τ , 并利用 $\tau^2 = \tau$, 得 $\tau\sigma\tau + \tau\sigma = T_0$, $\sigma\tau + \tau\sigma\tau = T_0$, 两式相减得 $\sigma\tau - \tau\sigma = T_0$. (2). (1) 加 (2) 得, $2\sigma\tau = T_0$, 所以 $\sigma\tau = T_0$; (1) 减 (2) 得, $2\tau\sigma = T_0$, 所以 $\tau\sigma = T_0$. 因此 $\sigma\tau = \tau\sigma = T_0$.

\Leftarrow . 若 $\sigma\tau = \tau\sigma = T_0$, 则 $(\sigma + \tau)^2 = \sigma + \tau$.

例 4 在 $\mathbf{F}(x)$ 中, $\sigma(f(x)) = f'(x)$, $\tau(f(x)) = xf(x)$, 证明: $\sigma\tau - \tau\sigma = Te$.

证明 对任意的 $f(x) \in \mathbf{F}(x)$, 有

$$\begin{aligned}
(\sigma\tau - \tau\sigma)(f(x)) &= (\sigma\tau)(f(x)) - (\tau\sigma)(f(x)) \\
&= \sigma(\tau(f(x))) - \tau(\sigma(f(x))) = \sigma(xf(x)) - \tau(f'(x)) \\
&= (f(x) + xf'(x)) - xf'(x) = f(x) = Te(f(x)),
\end{aligned}$$

所以, $\sigma\tau - \tau\sigma = Te$.

说明 本例可推广为: 对于任意正整数 n , 都有 $\sigma^n\tau - \tau\sigma^n = n\sigma^{n-1}$.

三 线性变换的性质

根据线性变换的定义及已知的性质进行证明. 对有限维线性空间而言, 可以考虑将线性变换的问题转化为矩阵的问题来处理.

例 5 设 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ 是线性空间 V 的 k 个互不相同的线性变换, $k \geq 2$, 证明: 在 V 中必存在一向量 δ , 使 $\sigma_1(\delta), \sigma_2(\delta), \dots, \sigma_k(\delta)$ 互不相同.

证明 1 对线性变换的个数 k 用数学归纳法.

1) 当 $k=2$ 时, 由 σ_1, σ_2 不相同即得, 必存在 $\delta \in V$, 使 $\sigma_1(\delta) \neq \sigma_2(\delta)$, 结论成立.

2) 设 $k-1$ 时成立, 考虑 k 的情况. 对于互不相同的线性变换 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$, 由归纳假设, 存在 $\alpha \in V$, 使 $\sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \dots, \sigma_{k-1}(\alpha)$ 互不相同. 若有 $\sigma_k(\alpha) \neq \sigma_i(\alpha) (i=1, 2, \dots, k-1)$, 则记 $\alpha = \delta$, $\sigma_1(\delta), \sigma_2(\delta), \dots, \sigma_k(\delta)$ 互不相同, 结论成立.

若有 $j, 1 \leq j \leq k-1$, 使 $\sigma_k(\alpha) = \sigma_j(\alpha)$, 则当 $i=1, 2, \dots, k-1$ 且 $i \neq j$ 时, 有 $\sigma_k(\alpha) \neq \sigma_i(\alpha)$. 再由 σ_k 与 σ_j 不相同得, 存在 $\beta \in V$, 使得 $\sigma_k(\beta) \neq \sigma_j(\beta)$. 由 α 与 β 作向量 $\gamma = \lambda\alpha + \beta, \lambda \in F$, 下面证明, 对于 $i, l=1, 2, \dots, k$, 且 $i \neq l$, 至多有一个 $\lambda \in F$, 使得 $\sigma_i(\gamma) = \sigma_l(\gamma)$.

若不然, 设 $\lambda \neq \lambda_1$, 使 $\sigma_i(\lambda\alpha + \beta) = \sigma_l(\lambda\alpha + \beta)$ 与 $\sigma_i(\lambda_1\alpha + \beta) = \sigma_l(\lambda_1\alpha + \beta)$, 则, I) 当 i 与 l 均不是 k , 或 i 与 l 中有一个为 k 而另一个不为 j 时, 得到 $(\lambda - \lambda_1)\sigma_i(\alpha) = (\lambda - \lambda_1)\sigma_l(\alpha)$, 再由 $\lambda \neq \lambda_1$ 得到 $\sigma_i(\alpha) = \sigma_l(\alpha)$, 矛盾; II) 当 i 与 l 有一个为 k 而另一个为 j 时, 得到 $\sigma_k(\beta) = \sigma_j(\beta)$, 矛盾.

因此, 对 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ 而言, 至多有 \mathbf{F} 中的 c_k^2 个数 λ , 使 $\sigma_i(\lambda a + \beta) = \sigma_i(\lambda a + \beta)$. 但是, \mathbf{F} 有无穷多个解, 从而, 必有 $\lambda_0 \in \mathbf{F}$, 使 $\sigma_1(\delta), \sigma_2(\delta), \dots, \sigma_k(\delta)$ 互不相同, $\delta = \lambda_0 a + \beta$.

证明 2 设 $V_{ij} = \{a | a \in V \text{ 且 } \sigma_i(a) = \sigma_j(a)\}, i < j, i, j = 1, 2, \dots, k$, 则易证 V_{ij} 是 V 的子空间, 从略. 又, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ 互不相同, 所以, 对于 $\sigma_i, \sigma_j, i < j$, 存在 $\beta \in V$, 使 $\sigma_i(\beta) \neq \sigma_j(\beta)$, 即 $\beta \notin V_{ij}$, 从而, V_{ij} 是 V 的真子空间.

当 V_{ij} 均为 V 的非平凡子空间时, 由第六章的已有结果知, 存在 $\delta \in V$, 使 δ 不属于所有的 V_{ij} , 即 $\sigma_1(\delta), \sigma_2(\delta), \dots, \sigma_k(\delta)$ 互不相同.

当 $\{V_{ij}\}$ 中有平凡子空间时, 则只能是零空间, 此时, 只要 $a \in V, a \neq 0$, 就有 $\sigma_i(a) \neq \sigma_j(a)$, 将这种平凡子空间去掉, 剩下的非平凡子空间, 归结为已证的情况, 从而, 仍存在 $\delta \in V$, 使 $\sigma_1(\delta), \sigma_2(\delta), \dots, \sigma_k(\delta)$ 互不相同.

例 6 设 V 是 \mathbf{F} 上的 n 维线性空间, σ 是 V 的线性变换, 并且 σ 与 V 的全体线性变换可交换, 证明: σ 是数乘变换.

证明 取 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 设 σ 在该组基下的矩阵为 A . 因为, 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 之下, V 的线性变换与 n 阶矩阵一一对应, 且保持运算, 所以, 由条件知, A 与一切 n 阶矩阵可交换. 又, 与一切 n 阶矩阵可交换的矩阵必为数量矩阵, 而数量矩阵与数乘变换相对应, 所以, A 是数量矩阵, σ 是数乘变换.

四 矩阵相似

根据矩阵相似的定义, 找到 X , 使 $B = X^{-1}AX$; 或者, 证明 A 与 B 是线性空间 V 的线性变换 σ 在不同基下的矩阵.

例 7 设有两个 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

证明 A 与 B 相似.

证明 1 因为 $P(i, j(k))^{-1} = P(i, j(-k))$, 所以由矩阵的乘法得到 $P(1, 2(1))P(2, 3(1)) \cdots P(n-1, n(1))AP(n-1, n(-1)) \cdots P(2, 3(-1))P(1, 2(-1)) = B_1$,

$$P\left(2, 1\left(-\frac{n-1}{n}\right)\right) \cdots P\left(n, (n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\right)B_1.$$

$$P\left(n, (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)\right) \cdots P\left(2, 1\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) = B,$$

所以, A 与 B 相似.

证明 2 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 则有 V 的线性变换 σ , 使 σ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 B, 即 $\sigma(\varepsilon_1) = n\varepsilon_1, \sigma(\varepsilon_i) = 0, i = 2, 3, \dots, n$.

设 $\eta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n, \eta_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \eta_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \dots, \eta_n = \varepsilon_1 - \varepsilon_n$, 则易证 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 线性无关, 从而作成 V 的一组基. 易知 $\sigma(\eta_1) = \sigma(\eta_2) = \cdots = \sigma(\eta_n) = n\varepsilon_1 = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n$ 所以, σ 在基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 下的矩阵是 A.

因此, A 与 B 相似.

例 8 设 A 与 B 是数域 F 上的两个 n 阶矩阵, $A^n = B^n = 0$, 但 $A^{n-1} \neq 0, B^{n-1} \neq 0, n \geq 1$, 证明 A 与 B 相似.

证明 1) 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 则有 V 的线性变换 σ , 使 σ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵是 A. 由 $A^n = 0$ 但 $A^{n-1} \neq 0$ 知 $\sigma^n = T_0$ 但 $\sigma^{n-1} \neq T_0$, 从而有 $a \in V$, 使 $\sigma^n(a) = 0$ 但 $\sigma^{n-1}(a) \neq 0$. 可以证明, $a, \sigma(a), \dots, \sigma^{n-1}(a)$ 线性无关, 从而作成 V 的一组基, 此处从略. 易知, σ 在基 $a, \sigma(a), \dots, \sigma^{n-1}(a)$ 下的矩阵是

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以, A 与 N 相似.

2) 同理可证, B 与 N 相似.

3) 因此, A 与 B 相似.

五 特征值与特征向量、对角化

根据特征值与特征向量的定义与性质, 以及可以对角化的条件, 进行证明.

例 9 设 σ, τ 是有限维线性空间 V 的线性变换, 证明 $\sigma\tau$ 与 $\tau\sigma$ 有相同的特征值.

证明 1 设 λ 是 $\sigma\tau$ 的特征值.

若 $\lambda = 0$, 则易知 $\sigma\tau$ 不是单射, 证明从略. 由于 V 是有限维的, 所以 $\sigma\tau$ 是不可逆的, 从而 σ 或 τ 是不可逆的, 因此 $\tau\sigma$ 是不可逆的, 0 是 $\tau\sigma$ 的特征值.

若 $\lambda \neq 0$, 则存在 V 的向量 $a \neq 0$, 使 $(\sigma\tau)(a) = \lambda a$. 设 $\beta = \tau(a)$, 则由 $a \neq 0, \lambda \neq 0$ 得, $\sigma(\beta) = (\sigma\tau)(a) = \lambda a \neq 0$, 从而 $\beta \neq 0$. 所以, $(\tau\sigma)(\beta) = (\tau\sigma)(\tau(a)) = \tau((\sigma\tau)(a)) = \tau(\lambda a) = \lambda(\tau(a)) = \lambda\beta$, 因此, λ 是 $\tau\sigma$ 的特征值.

同理可证, 若 λ 是 $\tau\sigma$ 的特征值, 则 λ 也是 $\sigma\tau$ 的特征值. 因此, $\sigma\tau$ 与 $\tau\sigma$ 有相同的特征值.

证明 2 设 σ, τ 在 V 的某组基下的矩阵分别是 A, B , 又, E 是 n 阶单位矩阵, λ 是一个文字, 则由

$$\begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & \lambda E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda E - AB \\ \lambda E & \lambda B \end{pmatrix}$$

两边取行列式得 $\lambda^n \begin{vmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{vmatrix} = \lambda^n (-1)^{n^2} |\lambda E - AB|$.

同理, 由 $\begin{pmatrix} E & 0 \\ -B & \lambda E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \lambda E \\ \lambda E - BA & 0 \end{pmatrix}$

得 $\lambda^n \begin{vmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{vmatrix} = \lambda^n (-1)^{n^2} |\lambda E - BA|$.

所以, $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$, $\sigma\tau$ 与 $\tau\sigma$ 有相同的特征多项式. 因此, $\sigma\tau$ 与 $\tau\sigma$ 有相同的特征值.

例10 设 A, B 都是数域 F 上的 n 阶矩阵. 若有 F 上的 n 阶可逆矩阵 X , 使 $X^{-1}AX, X^{-1}BX$ 同时为对角形, 则 $AB=BA$. 反之, 若 A, B 都可与对角形相似, 且 $AB=BA$, 则有 F 上的 n 阶可逆矩阵 X , 使 $X^{-1}AX, X^{-1}BX$ 同时为对角形.

证明 1) 由于 $X^{-1}AX, X^{-1}BX$ 同时为对角形, 所以 $(X^{-1}AX)(X^{-1}BX) = (X^{-1}BX)(X^{-1}AX)$, 因此, $AB=BA$.

2) 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, 取 V 的一组基 (Δ) , 则有 V 的线性变换 σ, τ , 使得 σ, τ 在基 (Δ) 下的矩阵分别为 A, B . 由 $AB=BA$ 得 $\sigma\tau=\tau\sigma$.

由于 A 与对角形相似, 所以 V 可以分解为:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_t} \quad (1)$$

其中 λ_i 为 σ 的特征值, V_{λ_i} 为 σ 的属于特征值 λ_i 的特征子空间.

由于 B 与对角形相似, 所以 τ 有 n 个特征向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 作成 V 的一组基. 不妨设 β_1 是 τ 的属于特征值 ρ_1 的特征向量, 由于 $\beta_1 \in V$, 所以可以把 β_1 按(1)式分解, 得

$$\beta_1 = a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1t}, \quad a_{1i} \in V_{\lambda_i} \quad (2)$$

表法是唯一的. 由 $a_{1i} \in V_{\lambda_i}$ 知 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1t}$ 中除零向量之外, 都是 σ 的特征向量. 下面证明, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1t}$ 中除零向量外, 都是 τ 的特征向量.

用 τ 作用于(2)的两边, 有

$$\tau(\beta_1) = \rho_1 \beta_1 = \rho_1 a_{11} + \cdots + \rho_1 a_{1t} \quad (3)$$

$$\tau(\beta_1) = \tau(a_{11}) + \cdots + \tau(a_{1t}) \quad (4)$$

由于 $\sigma\tau=\tau\sigma$, 所以可证 V_{λ_i} 在 τ 之下不变, 因此, $\tau(a_{1i}) \in V_{\lambda_i}$, 从而(3), (4)都是 $\tau(\beta_1)$ 的按(1)式的分解式, 由唯一性知, $\tau(a_{1i}) = \rho_1 a_{1i}, i=1, 2, \dots, t$, 即 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1t}$ 中除了零向量之外, 都是 τ 的特征向量, 自然同时也是 σ 的特征向量.

同上, 依次对 β_2, \dots, β_n 讨论, 最后得到

$$a_{11}, \dots, a_{1t}; a_{21}, \dots, a_{2t}; \dots; a_{n1}, \dots, a_{nt} \quad (5)$$

并且, (5) 中除零向量外, 都是 τ 和 σ 的公共特征向量. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 可由 (5) 线性表出, 又由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是 V 的一组基知, (5) 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表出, 所以 (5) 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 可以互相线性表出, 从而可以在 (5) 中找到 n 个线性无关的向量作成 V 的一组基(*). 在基(*)之下, σ, τ 的矩阵均为对角形. 设 V 的基(Δ)到(*)的过渡矩阵是 X , 则 $X^{-1}AX, X^{-1}BX$ 分别是 σ, τ 在(*)下的矩阵, 即 $X^{-1}AX, X^{-1}BX$ 同时为对角形.

六 不变子空间

根据不变子空间的定义进行证明, 有时与特征值、特征向量、特征多项式联系在一起, 所以, 要注意综合使用各种有关的知识.

例11 设 σ 是数域 F 上向量空间 V 的一个线性变换, 并且 $\sigma^2 = \sigma$. 证明:

- 1) $\sigma^{-1}(0) = \{\xi - \sigma(\xi) \mid \xi \in V\}$;
- 2) $V = \sigma^{-1}(0) \oplus \sigma(V)$;
- 3) 若 τ 是 V 的线性变换, 则 $\sigma^{-1}(0)$ 和 $\sigma(V)$ 都是 τ 的不变子空间 $\Leftrightarrow \sigma\tau = \tau\sigma$.

证明 1) 设 $W = \{\xi - \sigma(\xi) \mid \xi \in V\}$. 对任意 $\xi \in V$, $\sigma(\xi - \sigma(\xi)) = \sigma(\xi) - \sigma^2(\xi) = 0$, 所以 $W \subseteq \sigma^{-1}(0)$. 对任意的 $\eta \in \sigma^{-1}(0)$, 有 $\sigma(\eta) = 0$, 所以 $\eta - \sigma(\eta) \in W$, 从而 $\sigma^{-1}(0) \subseteq W$. 因此, $\sigma^{-1}(0) = \{\xi - \sigma(\xi) \mid \xi \in V\}$.

2) 因为, 对任意 $\xi \in V$, $\xi = (\xi - \sigma(\xi)) + \sigma(\xi)$, 所以, $V = \sigma^{-1}(0) + \sigma(V)$. 对于任意 $\eta \in \sigma^{-1}(0) \cap \sigma(V)$, 有 $\eta \in \sigma^{-1}(0)$ 且 $\eta \in \sigma(V)$, 所以, 存在 $\xi \in V$ 使 $\sigma(\xi) = \eta$ 且 $\sigma(\eta) = 0$, 从而 $\eta = \eta - \sigma(\eta) = \eta - \sigma^2(\xi) = 0$, 因此, $\sigma^{-1}(0) \cap \sigma(V) = \{0\}$, $V = \sigma^{-1}(0) \oplus \sigma(V)$.

3) \Rightarrow . 对任意 $\alpha \in V$, 由 2), $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 其中 $\alpha_1 \in \sigma^{-1}(0)$, $\alpha_2 \in \sigma(V)$, 存在 β 使 $\alpha_2 = \sigma(\beta)$. 因为 $\sigma^{-1}(0)$, $\sigma(V)$ 都是 τ 的不变子空间, 所以 $(\tau\sigma)(\alpha) = (\tau\sigma)(\alpha_1) + (\tau\sigma)(\alpha_2) = (\tau\sigma)(\alpha_2) = (\tau\sigma)(\sigma(\beta)) = (\tau\sigma^2)(\beta) = (\tau\sigma)(\beta) \in \sigma(V)$, 从而存在 $\gamma \in V$ 使 $(\tau\sigma)(\beta) = \sigma(\gamma)$. 而 $(\sigma\tau)(\alpha) = (\sigma\tau)(\alpha_1) + (\sigma\tau)(\alpha_2) = (\sigma\tau)(\alpha_2) = (\sigma\tau)(\sigma(\beta)) = \sigma((\tau\sigma)(\beta)) = \sigma(\sigma(\gamma)) = \sigma(\gamma)$. 因此, $(\tau\sigma)(\alpha) = (\sigma\tau)(\alpha)$, 即 $\tau\sigma = \sigma\tau$.

\Leftarrow . 设 $\sigma\tau = \tau\sigma$. 对于 $\sigma^{-1}(0)$ 中的任意向量 $\xi = \sigma(\xi)$, 有 $\tau(\xi - \sigma(\xi)) = \tau(\xi) - (\tau\sigma)(\xi) = \tau(\xi) - \sigma(\tau(\xi)) \in \sigma^{-1}(0)$, 所以 $\sigma^{-1}(0)$ 是 τ 的不变子空间. 对于任意 $\eta \in \sigma(V)$, 存在 $\xi \in V$, 使 $\eta = \sigma(\xi)$, 有 $\tau(\eta) = \tau(\sigma(\xi)) = (\tau\sigma)(\xi) = \sigma(\tau(\xi)) \in \sigma(V)$, 所以, $\sigma(V)$ 是 τ 的不变子空间.

例12 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, σ 是 V 的线性变换, 证明:

1) 若 W 是 V 的非平凡不变子空间, 则 $\sigma|_W$ 的特征多项式 $f_{(\sigma|_W)}(\lambda)$ 整除 $f_\sigma(\lambda)$;

2) 若 σ 有 n 个互异的特征值, 则 σ 共有 2^n 个不变子空间

证明 1) 取 W 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$, 将它扩充为 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_n$. 设 σ 在该组基下的矩阵为 A , 则

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

其中 B 为 $\sigma|_W$ 在 W 的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ 下的矩阵. 从而,

$$f_\sigma(\lambda) = f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda E_m - B & -C \\ 0 & \lambda E_{n-m} - D \end{vmatrix} = f_B(\lambda) f_D(\lambda).$$

但 $f_{(\sigma|_W)}(\lambda) = f_B(\lambda)$, 所以 $f_{(\sigma|_W)}(\lambda)$ 整除 $f_\sigma(\lambda)$.

2) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 σ 的 n 个互异的特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 分别为 σ 的属于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的特征向量, 则 $\alpha_1, \alpha_2,$

∴, α_n 线性无关, 且 $f_\sigma(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.

设 W 是 σ 的 m 维不变子空间, $m \geq 1$, 则由 1) 知, $f(\sigma|_W)(\lambda) = (\lambda - \lambda_{i_1})(\lambda - \lambda_{i_2}) \cdots (\lambda - \lambda_{i_m})$, 所以, W 中有 σ 的特征向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$ 作成它的基. 反之, 具有这样的基的子空间是 σ 的不变子空间. 因此, σ 共有 2^n 个不变子空间.

§5 补充资料

I 线性映射

设 V 与 V' 是数域 F 上的两个线性空间, σ 是 V 到 V' 的映射. 若 σ 满足

$$\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V,$$

$$\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha), \quad \forall \alpha \in V, \quad \forall k \in F,$$

则称 σ 是 V 到 V' 的线性映射或线性算子.

当 $V = V'$ 时, 线性映射就变为线性变换.

设 V 与 V' 分别是 n 维与 m 维线性空间, σ 是到 V 到 V' 的线性映射. 任意取定 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 与 V' 的一组基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_m'$. 若

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma(\varepsilon_1) &= a_{11}\varepsilon'_1 + a_{21}\varepsilon'_2 + \dots + a_{m1}\varepsilon'_m \\ \sigma(\varepsilon_2) &= a_{12}\varepsilon'_1 + a_{22}\varepsilon'_2 + \dots + a_{m2}\varepsilon'_m \\ &\vdots \\ \sigma(\varepsilon_n) &= a_{1n}\varepsilon'_1 + a_{2n}\varepsilon'_2 + \dots + a_{mn}\varepsilon'_m \end{aligned} \right.$$

即，可以“形式地”写为

$$\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \dots, \sigma(\varepsilon_n)) = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_m') \Lambda,$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

则称 Λ 是线性映射 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 与基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_m'$ 下的矩阵。

若 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 与基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_m'$ 下的矩阵是 A , 在基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 与基 $\eta_1', \eta_2', \dots, \eta_m'$ 下的矩阵是 B , $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的过渡矩阵是 P , $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_m'$ 到 $\eta_1', \eta_2', \dots, \eta_m'$ 的过渡矩阵是 Q , 则 $B = Q^{-1}AP$.

若 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 与基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_m'$ 下的矩阵是 A , 其秩为 r , 则存在基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 与基 $\eta_1', \eta_2', \dots, \eta_m'$, 使 σ 在基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 与基 $\eta_1', \eta_2', \dots, \eta_m'$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_{rr} & O_{r, n-r} \\ O_{m-r, r} & O_{m-r, n-r} \end{pmatrix}.$$

II 根子空间

设 V 是数域 F 上的线性空间, σ 是 V 的线性变换. 若对于 $\rho \in F$, 存在 $\alpha \in V$, $\alpha \neq 0$, 使得 $(\rho Te - \sigma)^h(\alpha) = 0$, 其中 h 为正整数, 则称 α 是 σ 的属于 ρ 的根向量.

若 σ 的属于 ρ 的根向量存在, 则 ρ 是 σ 的一个特征值. 反之, 若 ρ 是 σ 的特征值, 则 σ 的属于 ρ 的根向量必存在.

属于线性变换 σ 的某一固定特征值 ρ 的所有根向量再添上零向量, 组成 V 的一个子空间, 称为 σ 的属于特征值 ρ 的根子空间.

属于 σ 的不同特征值的根向量线性无关.

若 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ 是线性变换 σ 的不同的特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 分别是属于 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ 的根向量, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$, $\alpha \in W$, W 是 σ 的不变子空间, 则 $\alpha_i \in W$, $i = 1, 2, \dots, s$.

不同的根子空间的交是零空间, 从而其和是直和.

若 α 是 σ 的属于 ρ 的根向量, $(\rho Te - \sigma)^m(\alpha) = 0$, 但 $(\rho Te - \sigma)^{m-1}(\alpha) \neq 0$, 则称 α 是 σ 的属于特征值 ρ 的 m 次根向量.

n 维线性空间中的任何根向量的次数都不大于 n .

若有一个 σ 的属于特征值 ρ 的 n 次根向量, 则 σ 在 V 的某组基下的矩阵是若当块.

II 极小多项式

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, σ 是 V 的线性变换, $g(\lambda)$ 是 F 上的首1多项式. 若 $g(\lambda)$ 是使 $g(\sigma)=T_0$ 的次数最小的多项式, 则称 $g(\lambda)$ 是 σ 的极小多项式, 也称为最小多项式.

σ 的极小多项式存在且唯一.

若 $g(\lambda)$ 是 σ 的极小多项式, $f(\lambda)$ 为 F 上的任一多项式, 则 $f(\sigma)=T_0 \Leftrightarrow g(\lambda) \mid f(\lambda)$.

类似地定义 n 阶矩阵的极小多项式, 并证明上面的两条结论. 进而, 相似矩阵有相同的极小多项式. 若 $A=\{A_1, A_2, \dots, A_s\}$, 则 A 的极小多项式是 A_1, A_2, \dots, A_s 的极小多项式的最小公倍式.

就一定意义上来说, 一线性变换的极小多项式就是某一类矩阵的极小多项式.

k 阶若当块 $J(\lambda_0, k)$ 的极小多项式为 $(\lambda - \lambda_0)^k$.

数域 F 上 n 阶矩阵 A 与对角形矩阵相似的必要充分条件为 A 的极小多项式是 F 上互素的一次因式的乘积.

数域 F 上的 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 在 V 的某组基下的矩阵为对角形的必要充分条件是 σ 的极小多项式是 F 上互素的一次因式的乘积.

复数域 C 上 n 阶矩阵 A 与对角形相似的必要充分条件为 A 的极小多项式没有重根.

VI 商空间的诱导变换

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, σ 是 V 的线性变换, M 是 σ 的不变子空间. 作

$\bar{\sigma}: V/M \rightarrow V/M, \bar{\sigma}(\alpha + M) = \sigma(\alpha) + M, \forall \alpha \in V$, 则 $\bar{\sigma}$ 是 V/M 的一个变换, 并且是线性变换. 称 $\bar{\sigma}$ 是 σ 在商空间

V/M 内的诱导变换.

在 M 内取一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$, 扩充为 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n$. 设

$$\sigma(\varepsilon_{r+k}) = a_{r+1, r+k} \varepsilon_{r+1} + \dots + a_{n, r+k} \varepsilon_n + \beta_{r+k},$$

其中 $k=1, 2, \dots, n-r$, $\beta_{r+k} \in M$, 则 $\varepsilon_{r+1} + M, \varepsilon_{r+2} + M, \dots, \varepsilon_n + M$ 组成 V/M 的一组基. 并且

$$\overline{\sigma}(\varepsilon_{r+k} + M) = \sigma(\varepsilon_{r+k}) + M$$

$$\overline{\sigma}(\varepsilon_{r+k} + M) = \sigma(\varepsilon_{r+k}) + M = (a_{r+1, r+k} \varepsilon_{r+1} + \dots + a_{n, r+k} \varepsilon_n) + M = a_{r+1, r+k}(\varepsilon_{r+1} + M) + \dots + a_{n, r+k}(\varepsilon_n + M),$$

从而, $\overline{\sigma}$ 在 V/M 的基 $\varepsilon_{r+1} + M, \dots, \varepsilon_n + M$ 下的矩阵为

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{r+1, r+1} & \dots & a_{r+1, n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n, r+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

此时, σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix}.$$

σ 的特征多项式为 $f_\sigma(\lambda) = |\lambda E - A_1| |\lambda E - \overline{A}|$. 因此, $\overline{\sigma}$ 的特征多项式 $f_{\overline{\sigma}}(\lambda) = |\lambda E - \overline{A}|$ 是 σ 的特征多项式 $f_\sigma(\lambda)$ 的因式.

V 二阶三阶矩阵的若当形

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, σ 是 V 的线性变换. 若 σ 的特征多项式的根全在 F 中, 则 σ 的任意 r 个线性无关的特征向量 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ ($r \geq 1$) 均可以扩充为 V 的一组基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r, \eta_{r+1}, \dots, \eta_n$, 使 σ 在这组基下的矩阵为如下形式

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

其中 A_1, A_3 分别为 r 阶与 $n-r$ 阶矩阵, 且

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_r \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{r+1, r+1} & \dots & a_{r+1, n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & & \end{pmatrix}.$$

设 σ 是复数域上二维线性空间 V 的一个线性变换, 则有 V 的一组基 η_1, η_2 , 使 σ 在该组基下的矩阵为下列两种形式之一:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

设 σ 是复数域上三维线性空间 V 的一个线性变换, 则有 V 的一组基 η_1, η_2, η_3 , 使 σ 在该组基下的矩阵为下列三种形式之一:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

VI 幂零矩阵的标准形式

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, σ 是 V 的线性变换. 若存在正整数 m , 使 $\sigma^m = T_0$, 则称 σ 是一个幂零变换.

当 σ 是幂零变换时, 一定存在最小的正整数 r , 使 $\sigma^r = T_0$, 从而, σ 的极小多项式是 x^r . 于是, 存在 $\xi_0 \in V$, 使 $\sigma^r(\xi_0) = 0$, 而 $\sigma^{r-1}(\xi_0) \neq 0$, 所以 $\xi_0, \sigma(\xi_0), \dots, \sigma^{r-1}(\xi_0)$ 线性无关, 而由这些向量生成的子空间 W 是 r 维的. W 称为关于 σ 的一个循环子空间, 简称 σ -循环子空间.

若存在一个向量 ξ_0 和一个正整数 r , 使得, 1) $\xi_0, \sigma(\xi_0), \dots, \sigma^{r-1}(\xi_0)$ 构成 W 的一组基, 2) $\sigma^r(\xi_0) = 0$, 则称 ξ_0 是循环子空间 W 的一个生成向量, 称 $\xi_0, \sigma(\xi_0), \dots, \sigma^{r-1}(\xi_0)$ 是 W 的一个循环基.

若 W 是一个 σ -循环子空间, 而 $\xi_0, \sigma(\xi_0), \dots, \sigma^{r-1}(\xi_0)$ 是 W 的一个循环基, 则 σ 在 W 上的限制 $\sigma|_W$ 是 W 的一个幂零变换, 并且在这组基下的矩阵是形如

$$N_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的一个 r 阶矩阵, N_r 称为一个 r 阶幂零若当矩阵或幂零若当块.

设 σ 是 n 维线性空间 V 的一个幂零线性变换, 则 V 可以分解为 σ -循环子空间的直和 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$, 并且 $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_s$, $r_i = \dim W_i$, $i = 1, 2, \cdots, s$.

每一个 n 阶幂零矩阵都与一个形如 $N = (N_{r_1}, N_{r_2}, \cdots, N_{r_s})$ 的矩阵相似, 其中 N_{r_i} 是一个 r_i 阶幂零若当块, $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_s$.

设 σ 是 n 维线性空间 V 的一个幂零线性变换. 若有两种方式将 V 分解为 σ -循环子空间的直和 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_t$, 并且 $\dim W_i = r_i$, $i = 1, 2, \cdots, s$, $\dim U_j = p_j$, $j = 1, 2, \cdots, t$, 满足 $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_s$, $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_t$, 则 $s = t$, $r_i = p_i$, $i = 1, 2, \cdots, s$.

VII 特征值的计算与估计

当 n 较大时, 利用定义求 n 阶矩阵 A 的特征值是很困难的, 原因在于: 1) 将行列式 $|\lambda E - A|$ 展开为 λ 的 n 次多项式, 计算量巨大; 2) 求出 n 次多项式 $f_A(\lambda)$ 的根, 没有一般的方法. 因此, 必须探讨求矩阵的特征值的一些有效的方法. 现在已找到了许多这样的方法, 最常见的是: 1) 克雷洛夫方法; 2) 达尼列夫斯基方法; 3) 勒弗里叶方法.

复数域上 n 阶矩阵的 n 个特征值是复平面上的 n 个点, 对于它们所在的位置, 给出一个范围, 就是特征值的估计问题. 这方面的结果很多, 此处仅列出两个基本的定理.

圆盘定理 1. 设 $A = (a_{ij})$ 为任意 n 阶复矩阵, 则 A 的特征值都在复平面上的 n 个圆 $|z - a_{ii}| \leq R_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 的并集内, 其中 $R_i = |a_{i1}| + \cdots + |a_{i, i-1}| + |a_{i, i+1}| + \cdots + |a_{in}|$.

圆盘定理 2. 由圆盘定理 1 的所有圆组成的连通部分中任意取一个, 若它是由 k 个圆组成的, 则在这个连通部分中必有且只有 A 的 k 个特征值 (对角线元素有相同时重复计算, 特征值有相同时也重复计算).

Ⅶ 历史资料点滴

从行列式理论中带来的另一个概念是 n 阶矩阵的特征方程，它定义为 $|M - \lambda E| = 0$ ，这里， $|M - \lambda E|$ 是矩阵 $M - \lambda E$ 的行列式，而 E 是单位矩阵。这一术语是由柯西引进用于行列式的。

特征方程的概念隐含地出现在欧拉的化三个变数的二次型到它们的主轴上去的著作中，但他对特征根的实性没有给出证明。

特征方程的概念首先明确地出现在拉格朗日关于线性微分方程组的著作中，也出现于拉普拉斯在同一领域的著作中。拉普拉斯的特征方程（也称长期方程）联系于一个六阶行列式，而 λ 的值确定了微分方程组的解。

柯西从欧拉、拉格朗日、拉普拉斯的著作中认识了共同的特征值问题。他在1826年的《几何中无穷小演算的应用教程》中着手研究化简三个变数的二次型的问题，并证明了特征方程在直角坐标系的任何变换下是不变的。他在1829年的《数学练习》中，开始研究行星轨道的长期不等式，证明了用一个线性变换同时化两个二次型为平方和，再次用到特征根概念。

在1858年的文章中，凯莱宣告了一个结果，现在称为任意阶矩阵的Cayley-Hamilton定理。这定理说，在特征方程 $|M - \lambda E| = 0$ 中，用 M 代替 λ ，则得到的矩阵是零矩阵。凯莱说，他对3阶的情况进行了验证，又说进一步的证明是不必要的。哈密尔顿与这定理的关系是根据下列事实，即在他的《四元数讲义》中引进向量的线性向量函数，涉及到一个线性变换，该变换的矩阵满足它的特征方程。弗罗宾纽斯在他1878年的文章中给出了这定理的第一个一般性的证明，且对矩阵的特征根有一些是相等的情况修改了这个定理，并提出了极小多项式的概念。

弗罗宾纽斯对于特征方程提出了一个问题，他要找极小多项式，即矩阵所满足的次数最低的多项式。他说，它是由特征多项式的因式所形成的，而且是唯一的。Kurt Hensel (1861—1941)

在1904年的文章中证明了唯一性，还证明了极小多项式整除化零多项式。

Heniy Jaber在1890年的一篇文章里作为显然的事实断言：设 $x^n - m_1 x^{n-1} + m_2 x^{n-2} - \cdots \pm m_n = 0$ 是任一 n 阶矩阵 M 的特征方程，则 M 的行列式是 m_n 。若把矩阵的主子式理解为这样的子式的行列式，这些子式的对角线是矩阵 M 的主对角线的一部分，则 m_i 是 i 阶子式的和。于是特别地， m_1 是主对角线元素的和，它也是特征根的和，这和称为矩阵的迹。断言的证明是由别人给出的。

§6 基本习题

1 下面所定义的变换是不是线性变换？

- 1) 在线性空间 V 中， $\sigma(\alpha) = \alpha + \beta$ ， $\beta \in V$ 是一个固定向量；
- 2) 在线性空间 V 中， $\sigma(\alpha) = \beta$ ， $\beta \in V$ 是一个固定向量；
- 3) 在 F^3 中， $\sigma((x_1, x_2, x_3)) = (x_1^2, x_2 + x_3, x_3^2)$ 。

2 证明下列变换是线性变换：

- 1) 在 $M_n(F)$ 中， $\sigma(X) = BXC$ ， $B, C \in M_n(F)$ 是两个固定矩阵；

- 2) 在实数域上的线性空间 $C[a, b]$ 中定义变换 $\sigma(f(x)) = \int_a^x k(t)f(t)dt$ ，其中 $k(t)$ 是 $C[a, b]$ 上的一个固定的连续函数。

3 在 $M_2(F)$ 中，定义

$$\sigma_1\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} r_1 a_1 & 0 \\ 0 & r_2 b_2 \end{pmatrix},$$

$r_1, r_2 \in F$ ，求证 σ_1, σ_2 都是 $M_2(F)$ 的线性变换，并求 $\sigma_1 + \sigma_2, \sigma_1 \sigma_2$ 。

4 上题中，分别求 σ_1, σ_2 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的

矩阵.

5 3 维线性空间 V 的线性变换 σ 在 V 的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix},$$

试求 σ 的特征值与特征向量.

6 计算 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^k$.

7 证明: 若 σ, τ 是 n 维线性空间 V 的任意两个线性变换, 则 $\sigma\tau - \tau\sigma \neq Te$.

8 设 A 是 n 阶矩阵, $n > 1$, $A \neq 0$, 但 $A^m = 0$, 证明 A 不能与对角形矩阵相似.

9 证明: 若线性空间 V 的线性变换 σ 以 V 中的每个非零向量作为它的特征向量, 则 σ 是数乘变换.

10 σ_D 表示线性空间 $F[x]_n$ 的微分变换: $\sigma_D(f(x)) = f'(x)$, 证明 σ_D 的全部非零不变子空间有 n 个, 它们是 $F[x]_m$, $0 < m \leq n$.

第八章 λ -矩阵

§1 概括说明

通过求特征值与特征向量来化简矩阵，仅能解决对角形的问题，即，若矩阵 A 与对角形矩阵相似，则可求得可逆矩阵 X ，使 $X^{-1}AX$ 是对角形矩阵；而且，计算相当复杂。为了在一般情况下化简矩阵，就必须从理论上考虑另外的方法，于是就产生了 λ -矩阵的理论。

求特征值与特征向量，首先求特征多项式 $|\lambda E - A|$ 的根，而且， A 可否化简，部分地取决于 $|\lambda E - A|$ 的根的情况，从而就引导人们考虑 A 的特征矩阵 $\lambda E - A$ ，该矩阵的元素中含有文字 λ ，换言之，其元素是 λ 的多项式，这就是一个 λ -矩阵。

通过研究 λ -矩阵，进一步解决矩阵化简的问题，给出了矩阵的各种“标准形”，建立了完备的理论。而且，通过初等变换这样的简单可行的步骤，就可以具体地求出标准形（当然，没有求出过渡矩阵）。因此， λ -矩阵的理论是十分重要的， λ -矩阵是研究矩阵的一个有力工具。

本章中， λ -矩阵用 $A(\lambda)$ ， $B(\lambda)$ ， \dots 表示，而 A ， B ， \dots 表示矩阵，即以前各章中以数字为元素的矩阵，有时，为了强调，说成数字矩阵。由于数字也是 λ 的多项式，所以矩阵也是 λ -矩阵。

本章的内容分为四个部分： λ -矩阵及其标准形，不变因子与初等因子，矩阵相似的条件，若当标准形。

如同第四章那样，对 λ -矩阵，要讨论加法、乘法、行列式、子式、秩、可逆，要研究初等变换、等价、标准形，研究行列式因子，从而证明标准形的唯一性。

不变因子、初等因子，是 λ -矩阵自身的理论问题，同时是研究矩阵的各种标准形的基础与工具。

本章中所述矩阵相似的条件，主要是： n 阶矩阵 A 与 B 相似当且仅当（ λ -矩阵） $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 等价。从而，奠定了用 λ -矩阵研究数字矩阵的基础。

用 λ -矩阵的理论研究复数矩阵，证明了上一章中关于若当标准形的遗留定理，并且，给出了具体的求法。

本章的补充资料是： λ -矩阵的除法，Frobenius 标准形，Jacobson 标准形，历史资料点滴。

§2 内容提要

I λ -矩阵及其标准形

一 定义、运算、行列式、秩

1 定义

设 F 是一个数域， λ 是一个文字，作多项式环 $F[\lambda]$ 。若一个矩阵的元素是 $F[\lambda]$ 中的多项式，则称该矩阵是数域 F 上的一个 λ -矩阵，记作 $A(\lambda)$ ， $B(\lambda)$ ， \dots 。

数域 F 上的矩阵仍记为 A ， B ， \dots ，为了强调与 λ -矩阵的区别，有时称为数字矩阵。当然，数字矩阵也是 λ -矩阵。

两个 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相等 $\Leftrightarrow A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 都是 $m \times n$ 矩阵，且任意 (i, j) 元素均对应相等。

2 运算

加法。两个 $m \times n$ 的 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相加，就是对应位置上的元素相加，其和记作 $A(\lambda) + B(\lambda)$ 。加法适合交换律、结合律。由 $B(\lambda)$ 可以定义 $-B(\lambda)$ ，从而定义减法： $A(\lambda) - B(\lambda) = A(\lambda) + (-B(\lambda))$ 。

乘法。 $m \times n$ 的 λ -矩阵 $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))$ 与 $n \times s$ 的 λ -矩阵 $B(\lambda) = (b_{ij}(\lambda))$ 相乘，其积是一个 $m \times s$ 矩阵，记作 $A(\lambda)B(\lambda)$ ，

积的 (i, j) 元素为 $\sum_{t=1}^n a_{it}(\lambda)b_{tj}(\lambda)$ 。乘法适合结合律，不适合交换律，乘法对加法适合（左与右）两个分配律。

3 行列式与子式

$n \times n$ 的 λ -矩阵矩阵 $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))$ 的行列式定义为

$$|A(\lambda)| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1}(\lambda) a_{2j_2}(\lambda) \cdots a_{nj_n}(\lambda).$$

λ -矩阵的行列式具有第二章中关于行列式的各种性质及展开规则。

对于两个 $n \times n$ 的 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ ，成立 $|A(\lambda)B(\lambda)| = |A(\lambda)||B(\lambda)|$ 。

在 $m \times n$ 的 λ -矩阵 $C(\lambda)$ 中，固定 k 行 k 列，其交点处的 k^2 个元素组成一个 k 阶行列式，称为 $C(\lambda)$ 的一个 k 阶子式。其中， $1 \leq k \leq \min(m, n)$ 。

4 秩

若 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 中有一个 $r(\geq 1)$ 阶子式不为零，而所有 $r+1$ 阶子式（若还有的话）全为零，则称 $A(\lambda)$ 的秩为 r 。零矩阵的秩为零。

按照上述定义求秩相当麻烦，可以用后面的方法求出。

二 可逆 λ -矩阵

设 $A(\lambda)$ 是一个 $n \times n$ 的 λ -矩阵。若有一个 $n \times n$ 的 λ -矩阵 $B(\lambda)$ ，使 $A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E$ ，其中 E 是 n 阶单位矩阵，则称 $A(\lambda)$ 是可逆矩阵，称 $B(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的一个逆矩阵。

若 $A(\lambda)$ 可逆，则其逆矩阵唯一，记作 $A^{-1}(\lambda)$ 。

$n \times n$ 的 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 可逆 $\Leftrightarrow |A(\lambda)|$ 是一个非零常数。

若 $n \times n$ 的 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 可逆，则 $A(\lambda)$ 的秩为 n 。但是，反之不然。

三 初等变换、初等矩阵、等价、标准形

1 初等变换

下列三种变换称为 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的初等变换: 1) $A(\lambda)$ 的两行(列)互换位置; 2) $A(\lambda)$ 的某一行(列)乘以非零的数 c ; 3) $A(\lambda)$ 的某一行(列)的 $\phi(\lambda)$ 倍加于另一行(列), $\phi(\lambda)$ 是一个 λ 的多项式.

采用下列记号: $A(\lambda) \xrightarrow{[i, j]}$ 表示交换 $A(\lambda)$ 的第 i 行与第 j 行, $A(\lambda) \xrightarrow{[i, j]}$ 表示交换 $A(\lambda)$ 的第 i 列与第 j 列, $\xrightarrow{[i(c)]}$ 表示 $A(\lambda)$ 的第 i 行乘以非零常数 c , $A(\lambda) \xrightarrow{[i(c)]}$ 表示 $A(\lambda)$ 的第 i 列乘以非零常数 c , $A(\lambda) \xrightarrow{[i+j(\phi)]}$ 表示第 j 行的 $\phi(\lambda)$ 倍加于第 i 行, $A(\lambda) \xrightarrow{[i+j(\phi)]}$ 表示 $A(\lambda)$ 的第 i 列的 $\phi(\lambda)$ 倍加于第 j 列.

2 初等矩阵

下列三种 λ -矩阵称为初等矩阵: 1) 交换 E 的第 i, j 行(列)得到 $P(i, j)$; 2) 用非零常数 c 乘 E 的第 i 行(列)得到 $P(i(c))$; 3) E 的第 j 行(i 列)的 $\phi(\lambda)$ 倍加于第 i 行(j 列)得到 $P(i, j(\phi))$.

初等矩阵都是可逆的, 其逆矩阵也是初等矩阵, 且 $P(i, j)^{-1} = P(i, j)$, $P(i(c))^{-1} = P(i(c^{-1}))$, $P(i, j(\phi))^{-1} = P(i, j(-\phi))$.

$m \times n$ 的 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的初等行变换相当于左乘相应的 $m \times m$ 初等矩阵, 初等列变换相当于右乘相应的 $n \times n$ 初等矩阵. 从而, 初等变换是可逆的.

3 等价

设 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ 是两个 $m \times n$ 的 λ -矩阵. 若可以经一系列初等变换将 $A(\lambda)$ 化为 $B(\lambda)$, 则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价.

λ -矩阵的等价具有反身性、对称性、传递性.

$A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价 \Leftrightarrow 存在一系列初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s ,

Q_1, Q_2, \dots, Q_r , 使得 $B(\lambda) = P_s \cdots P_2 P_1 A(\lambda) Q_1 Q_2 \cdots Q_r$.

4 标准形

若 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的左上角元素 $a_{11}(\lambda) \neq 0$, $\deg(a_{11}(\lambda)) > 0$, 并且 $A(\lambda)$ 中至少有一个元素不能被它整除, 则一定可以找到一个与 $A(\lambda)$ 等价的矩阵 $B(\lambda)$, 使得 $B(\lambda)$ 的左上角元素也不为零, 但次数比 $a_{11}(\lambda)$ 低.

任意一个非零的 $m \times n$ 的 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 都等价于如下形状的矩阵(*); 其 (i, i) 元素为 $d_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, r$, $r \geq 1$, 而其余元素均为零, 并且 $d_i(\lambda)$ 首项系数为 1, $d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, r-1$). (*) 称为 $A(\lambda)$ 的标准形(法对角型). 零矩阵的标准形是零矩阵. 于是, 任意 $m \times n$ 的 λ -矩阵均存在标准形.

四 行列式因子、标准形唯一性

1 行列式因子

$A(\lambda)$ 的全部 k 阶子式的最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子.

$m \times n$ 的 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的行列式因子的性质如下: 1) 当 $1 \leq k \leq \min(m, n)$ 时, k 阶行列式因子存在且(不计常数因式)唯一; 2) $D_i(\lambda) | D_{i+1}(\lambda)$; 3) $D_k(\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow$ 至少有一个 k 阶子式不为零; 4) $D_k(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$ 所有 k 阶子式全为零; 5) $A(\lambda)$ 的秩为 $r \Leftrightarrow D_r(\lambda) \neq 0$ 且 $D_{r+1}(\lambda) = \dots = 0$.

定理. 等价的 λ -矩阵有相同的行列式因子. 等价的 λ -矩阵有相同的秩.

2 标准形的唯一性

λ -矩阵(*)的各阶行列式因子是: $D_1(\lambda) = d_1(\lambda)$, $D_2(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)$, \dots , $D_r(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda)$, $D_{r+1}(\lambda) = \dots = 0$.

$A(\lambda)$ 的标准形中的 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_r(\lambda)$ 由 $A(\lambda)$ 的行列式因子唯一决定. 于是, 任意 $m \times n$ 的 λ -矩阵的标准形是唯一的.

λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的秩及行列式因子可以按如下步骤求出: 1) 当 $A(\lambda) \neq 0$ 时, 用初等变换求得 $A(\lambda)$ 的标准形; 2) $A(\lambda)$ 的秩为 r , 行列式因子 $D_1(\lambda) = d_1(\lambda)$, $D_2(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)$, \dots , $D_r(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\dots d_r(\lambda)$, $D_{r+1}(\lambda) = \dots = 0$; 3) 当 $A(\lambda) = 0$ 时, 秩为零, 行列式因子 $D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = \dots = 0$.

利用行列式因子的性质, 可以证得: $n \times n$ 的 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 可逆 $\Leftrightarrow A(\lambda)$ 的各阶行列式因子均为 1. 于是 $A(\lambda)$ 可逆的必要充分条件有如下五条: 1) $|A(\lambda)|$ 等于非零常数; 2) $A(\lambda)$ 的各阶行列式因子均为 1; 3) $A(\lambda)$ 的标准形是 E ; 4) $A(\lambda)$ 与 E 等价; 5) $A(\lambda)$ 是一些初等矩阵的乘积.

$A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价 \Leftrightarrow 存在可逆矩阵 $P(\lambda)$ 与 $Q(\lambda)$, 使得 $B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$.

I 不变因子与初等因子

一 不变因子

非零 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的标准形中的非零元素 $d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda)$, \dots , $d_r(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的不变因子.

$A(\lambda)$ 的不变因子与其行列式因子相互唯一地决定.

$A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价 \Leftrightarrow 它们有相同的不变因子 \Leftrightarrow 它们有相同的行列式因子.

求 $A(\lambda)$ 的不变因子的问题也就是求 $A(\lambda)$ 的标准形的问题.

二 初等因子

设 $d_i(\lambda) \neq 1$ 是 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的一个不变因子. 若 $d_i(\lambda) = p_1^{k_1}(\lambda)p_2^{k_2}(\lambda)\dots p_s^{k_s}(\lambda)$ 是数域 F 上的标准分解式, 则称 $p_1^{k_1}(\lambda)$, $p_2^{k_2}(\lambda)$, \dots , $p_s^{k_s}(\lambda)$ 是不变因子 $d_i(\lambda)$ 的初等因子. $A(\lambda)$ 的所有不变因子的初等因子 (相同的必须按出现的次数计算) 作成的集合称为 $A(\lambda)$ 的初等因子组.

同一个因式的方幂的初等因子在不变因子的分解式中出现的

位置是唯一确定的。

$A(\lambda)$ 的不变因子唯一地决定 $A(\lambda)$ 的初等因子组；反之， $A(\lambda)$ 的秩与其初等因子组唯一地决定 $A(\lambda)$ 的不变因子。

由 $A(\lambda)$ 的秩 r 与 $A(\lambda)$ 的初等因子组求 $A(\lambda)$ 的不变因子的具体方法是：设 $A(\lambda)$ 的初等因子组中出现的互异不可约因式为 $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots, p_w(\lambda)$ ，对于每一个 $p_j(\lambda)$ ，将 $p_j(\lambda)$ 的方幂的初等因子按降幂排列，当个数不足 r 时，用 $p_j^0(\lambda)=1$ 补足到 r 个。设为

$$p_j^{k_{rj}}(\lambda), p_j^{k_{r-1,j}}(\lambda), \dots, p_j^{k_{1j}}(\lambda), \\ (j=1, 2, \dots, w),$$

则 $d_i(\lambda) = p_1^{k_{i1}}(\lambda) p_2^{k_{i2}}(\lambda) \dots p_w^{k_{iw}}(\lambda), (i=1, 2, \dots, r)$ 是 $A(\lambda)$ 的不变因子。

$A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价 \Leftrightarrow 它们有相同的秩与相同的初等因子组。于是， $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的必要充分条件有如下六条：1) 有初等矩阵 $P_1(\lambda), \dots, P_s(\lambda), Q_1(\lambda), \dots, Q_s(\lambda)$ 使 $B(\lambda) = P_s(\lambda) \dots P_1(\lambda) A(\lambda) Q_1(\lambda) \dots Q_s(\lambda)$ ；2) 它们有相同的标准形；3) 有可逆矩阵 $P(\lambda), Q(\lambda)$ ，使 $B(\lambda) = P(\lambda) A(\lambda) Q(\lambda)$ ；4) 它们有相同的行列式因子；5) 它们有相同的不变因子；6) 它们有相同的秩与相同的初等因子组。

初等变换保持 λ -矩阵的初等因子组不变。

若多项式 $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ 与 $g_1(\lambda), g_2(\lambda)$ 互素，则
 $(f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda)) = (f_1(\lambda), f_2(\lambda))(g_1(\lambda), g_2(\lambda))$ 。

设

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{pmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

若多项式 $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ 与 $g_1(\lambda), g_2(\lambda)$ 互素，则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价。

于是, 得到初等因子组的直接求法: 用初等变换将 $A(\lambda)$ 化为对角形, 使 $(1, 1), (2, 2), \dots, (r, r)$ 元素不为零, 而其余元素全为零; 再将主对角线上的元素写为标准分解式, 则所有这些不可约多项式的方幂 (重复的按出现的次数计算) 所组成的集合就是 $A(\lambda)$ 的初等因子组.

若 $A(\lambda)$ 是准对角形矩阵

$A(\lambda)_{n \times n} = (A_1(\lambda)_{n_1 \times n_1}, A_2(\lambda)_{n_2 \times n_2}, \dots, A_s(\lambda)_{n_s \times n_s})$
 则 $A(\lambda)$ 的初等因子组就是所有 $A_1(\lambda), A_2(\lambda), \dots, A_s(\lambda)$ 的初等因子组所组成的集合 (重复的按出现的次数计算).

II 矩阵相似的条件

讨论数字矩阵相似的条件.

n 阶矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda E - A$, 作为 λ -矩阵, 其秩为 n .

对于任何不为零的 n 阶数字矩阵 A 和 λ -矩阵 $U(\lambda), V(\lambda)$, 一定存在 λ -矩阵 $Q(\lambda)$ 与 $R(\lambda)$ 以及数字矩阵 U_0 和 V_0 , 使

$$U(\lambda) = (\lambda E - A)Q(\lambda) + U_0, V(\lambda) = R(\lambda)(\lambda E - A) + V_0.$$

特征矩阵 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 等价 \Leftrightarrow 存在可逆数字矩阵 R, S , 使 $\lambda E - A = R(\lambda E - B)S$.

$A \sim B \Leftrightarrow \lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 等价.

n 阶数字矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda E - A$ 的不变因子、初等因子组称为 A 的不变因子、初等因子组.

$A \sim B \Leftrightarrow$ 它们有相同的不变因子 \Leftrightarrow 它们有相同的初等因子组.

不变因子、初等因子是矩阵的相似不变量, 从而可以定义线性变换的不变因子、初等因子.

设 n 阶数字矩阵 A 的不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$, 则 $d_n(\lambda)$ 是 A 的极小多项式.

IV 若当标准形

若当块 $J(\lambda_0, t)$ 的不变因子是 $d_1(\lambda) = \dots = d_{t-1}(\lambda) = 1$,

$d_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^i$, 初等因子是 $(\lambda - \lambda_0)^i$.

复数矩阵 A 的初等因子是一次因式的方幂. 设 n 阶矩阵 A 的初等因子组是 $(\lambda - \lambda_1)^{k_1}, (\lambda - \lambda_2)^{k_2}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$, $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$, 则 A 与一若当矩阵相似, 除若当块的排列顺序外, 由 A 唯一确定, s 个若当块是 $J(\lambda_1, k_1), J(\lambda_2, k_2), \dots, J(\lambda_s, k_s)$. $\{J(\lambda_1, k_1), J(\lambda_2, k_2), \dots, J(\lambda_s, k_s)\}$ 称为 A 的若当标准形.

复数矩阵 A 与对角矩阵相似 $\Leftrightarrow A$ 的初等因子全是一次的.

若 σ 是复数域上的 n 维线性空间 V 的线性变换, 则在 V 中存在一组基, 使 σ 在该组基下的矩阵是若当形, 并且, 除去若当块的排列顺序外是被 σ 唯一确定的.

求 A 的若当标准形的步骤是: 1) 将 $\lambda E - A$ 化为对角形, 分解所得的多项式, 求得全部初等因子; 2) 写出相应于各初等因子的若当块; 3) 写出若当标准形.

§3 重点难点

本章的主题词是: λ -矩阵, λ -矩阵的 k 阶子式, λ -矩阵的秩, λ -矩阵的初等变换, λ -矩阵的等价 (相抵), λ -矩阵的标准形 (法对角型), 行列式因子, 不变因子, 初等因子; 若当标准形 (若当法式).

本章的基本方法是: λ -矩阵的初等变换方法, λ -矩阵标准形的求法, λ -矩阵秩的求法, λ -矩阵等价判别法, λ -矩阵的逆矩阵求法, 求不变因子法, 求行列式因子法, 求初等因子法, 矩阵相似判别法, 矩阵若当标准形求法.

本章的重点是: λ -矩阵的标准形, 矩阵相似的条件, 若当标准形.

λ -矩阵的标准形是 λ -矩阵自身的最重要的研究内容, 是研究行列式因子、不变因子、初等因子的基础, 从而, 是研究矩阵相

似、若当标准形的工具。总之，贯穿于全章的各个部分，因此， λ -矩阵的标准形，成为本章的一个重点。

以 λ -矩阵为工具，进一步研究矩阵相似的问题，是本章的主要目的之一。将 A 与 B 的相似问题，转化为 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 的等价问题，不仅是重要的结果，而且是重要的方法，包含着深刻的数学思想。 $A \sim B \Leftrightarrow \lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价，这是本章的中心定理。因此，矩阵相似的条件，成为本章的一个重点。

以 λ -矩阵为工具，研究复数矩阵的相似问题，得到若当标准形的完美结果。从理论上解决若当标准形的推导问题，从实践上给出若当标准形的求法问题，也是本章的主要目的之一。因此，若当标准形，成为本章的一个重点。

本章的难点是：行列式因子，矩阵相似的条件，初等因子。

行列式因子是本章的一个难点，原因在于：1）行列式因子的概念用到子式概念及最大公因式概念；2）对于一般的 λ -矩阵，用定义计算行列式因子，工作量很大，从而无法计算。解决困难的方法是：1）对于一些容易用定义计算行列式因子的 λ -矩阵，如对角形、由若当块 $J(\lambda_0, t)$ 得到的 λ -矩阵 $\lambda E - J(\lambda_0, t)$ 等，计算行列式因子；2）根据不变因子与行列式因子的关系，反过来认识行列式因子概念。

矩阵相似的条件，既是本章的一个重点，又是本章的一个难点，原因在于：1）要研究矩阵多项式；2）要研究 λ -矩阵的综合除法；3）证明矩阵相似的条件，推导较为麻烦。解决困难的方法是：1）理解矩阵相似的条件的相关概念及总体结构；2）用多项式的有关理论作类比，并注意多项式的次数的作用；3）注意 λ -矩阵可逆的条件。

初等因子是本章的一个难点，原因在于：1）初等因子的概念用到不变因子与多项式的标准分解式两个概念；2）重复出现的方幂按重数计算，对于这一点，不仅理解上有困难，而且在实

上也往往不计重数而发生错误。解决困难的方法是：1) 从不变因子与初等因子的关系入手，抓住关键来解决问题；2) 通过实际例子，特别是对角形的例子，加深理解初等因子的概念。

§4 习题类解

I 计算题

一 求 λ -矩阵的标准形

求 λ -矩阵的标准形的方法是：1) 用初等变换的方法；2) 利用行列式因子、不变因子、初等因子以及它们之间的关系。第一个方法是基本的，对任何情况均适用；第二个方法仅对于某些情况较方便，并且，也要配合以初等变换。

例 1 求 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的标准形，

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3 - \lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2 + 5\lambda & 3\lambda \end{pmatrix}.$$

解 1 作初等变换求得

$$\begin{aligned} A(\lambda) \begin{matrix} \{1, 2\} \\ \{1, 2\} \end{matrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 3\lambda & \lambda^2 + 5\lambda \\ 2\lambda^2 & \lambda^3 - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\{2(3)\}} \begin{pmatrix} 3\lambda & \lambda^2 + 5\lambda \\ 6\lambda^2 & 3\lambda^3 - 3\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\{2+1(-2\lambda)\}} \\ &\begin{pmatrix} 3\lambda & \lambda^2 + 5\lambda \\ 0 & \lambda^3 - 10\lambda^2 - 3\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\{2+1(-\frac{1}{3}(\lambda+5))\}} \begin{pmatrix} 3\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^3 - 10\lambda^2 - 3\lambda \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\{1(\frac{1}{3})\}} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^3 - 10\lambda^2 - 3\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

解 2 利用行列式因子与不变因子的关系求得， $D_1(\lambda) = \lambda$ ， $D_2(\lambda) = |A(\lambda)| = \lambda^4 - 10\lambda^3 - 3\lambda^2$ ， $d_1(\lambda) = D_1(\lambda) = \lambda$ ， $d_2(\lambda) = D_2(\lambda)/D_1(\lambda) = \lambda^3 - 10\lambda^2 - 3\lambda$ ，故 $A(\lambda)$ 的标准形是

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^3 - 10\lambda^2 - 3\lambda \end{pmatrix}.$$

例 2 求 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的标准形，

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}.$$

解 $A(\lambda)$ 的初等因子是: $\lambda, \lambda, (\lambda+1)^2, \lambda+1$. 由初等因子与不变因子的关系求得, $A(\lambda)$ 的不变因子是: $d_3(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2, d_2(\lambda) = \lambda(\lambda+1), d_1(\lambda) = 1$. 故 $A(\lambda)$ 的标准形是

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda(\lambda+1) & \\ & & \lambda(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}.$$

二 求 λ -矩阵的不变因子、初等因子

求 λ -矩阵的不变因子, 方法有三个: 1) 用初等变换求, 2) 用行列式因子求, 3) 用初等因子求.

例 3 求 λ -矩阵 $\lambda E - J(\lambda_0, t)$ 的不变因子.

解 $|\lambda E - J(\lambda_0, t)| = (\lambda - \lambda_0)^t$, 并且, 有一个 $t-1$ 阶子式为 $(-1)^{t-1}$, 所以 $D_t(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^t, D_{t-1}(\lambda) = 1$, 因此, 不变因子是: $d_1(\lambda) = \dots = d_{t-1}(\lambda) = 1, d_t(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^t$.

例 4 求 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子,

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}.$$

解 $A(\lambda)$ 的秩是 4. $A(\lambda)$ 的初等因子是: $\lambda+1, \lambda+2, \lambda-1, \lambda-2$. 所以, $A(\lambda)$ 的不变因子是: $d_4(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4), d_3(\lambda) = d_2(\lambda) = d_1(\lambda) = 1$.

求 λ -矩阵的初等因子, 方法有两个: 1) 用不变因子求, 2) 用初等变换将 λ -矩阵化为对角形, 而后由定理直接求.

例 5 求 $A(\lambda)$ 的初等因子组,

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^3(\lambda-2)^3 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(\lambda-2)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \end{pmatrix}$$

解 $A(\lambda) \xrightarrow{[1, 2]} (\dots) \xrightarrow{[4, 5]} (\dots) \xrightarrow{[3, 4]}$

$$\begin{pmatrix} \lambda^3(\lambda-2)^3 \\ \lambda(\lambda-2)^2 \\ \lambda-2 \\ \lambda(\lambda+1) \\ \lambda-2 \end{pmatrix},$$

故 $A(\lambda)$ 的初等因子是: $\lambda, \lambda, \lambda^3, \lambda+1, \lambda-2, \lambda-2, (\lambda-2)^2, (\lambda-2)^3$.

三 求 λ -矩阵的行列式因子

求 λ -矩阵的行列式因子, 方法有两个: 1) 由不变因子求, 2) 直接计算子式并求最大公因式.

例 6 求 $A(\lambda)$ 的行列式因子,

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 $A(\lambda)$ 的行列式是 $(\lambda+2)^4$, $A(\lambda)$ 有一个三阶子式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda+2 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

所以 $A(\lambda)$ 的行列式因子是: $D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = D_3(\lambda) = 1$, $D_4(\lambda) = (\lambda+2)^4$.

四 求 λ -矩阵的秩、逆矩阵

求 λ -矩阵的秩，方法有三个：1) 计算子式，2) 化标准形，3) 由不变因子求。

例7 求 $A(\lambda)$ 的秩，

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda+1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & \lambda^2+1 \\ \lambda-1 & \lambda & -\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

解 $|A(\lambda)| = 0$ ，但有二阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 \\ \lambda-1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0,$$

所以， $A(\lambda)$ 的秩为2。

求 $A(\lambda)$ 的逆矩阵的方法是：先计算 $|A(\lambda)|$ ，再计算 $A(\lambda)$ 的 $n-1$ 阶子式，从而 $A(\lambda)^{-1} = |A(\lambda)|^{-1} A(\lambda)^*$ 。

例8 试问 $A(\lambda)$ 是否可逆？若可逆，试求其逆矩阵。

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 2 & \lambda & 1 \\ \lambda^2+1 & 2 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}.$$

解 $|A(\lambda)| = -2 \neq 0$ ，所以， $A(\lambda)$ 可逆，且

$$A(\lambda)^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^3 + \lambda - 2 & -\lambda^3 - \lambda & \lambda \\ -\lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 1 & -1 \\ -\lambda^3 - \lambda + 1 & \lambda^3 + \lambda - 2 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

五 判断矩阵相似

方法：判断两个矩阵是否相似，就是要判断它们的特征矩阵是否等价。

例6 判断下列矩阵哪些相似？哪些不相似？

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解 } \lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

的初等因子为: $\lambda-2, (\lambda-1)^2$;

$$\lambda E - B = \begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 & -8 \\ -3 & \lambda+1 & -6 \\ 2 & 0 & \lambda+5 \end{pmatrix}$$

的初等因子为: $\lambda+1, (\lambda+1)^2$;

$$\lambda E - C = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

的初等因子为: $\lambda-2, (\lambda-1)^2$.

所以, $A \sim C$, 但 A 与 B , B 与 C 均不相似.

六 求若当标准形

方法: § 2, IV, 中所述的三个步骤.

例10 求矩阵 A 的若当标准形,

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解 } \lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-13 & -16 & -16 \\ 5 & \lambda+7 & 6 \\ 6 & 8 & \lambda+7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)^2(\lambda+3) \end{pmatrix},$$

初等因子为: $(\lambda-1)^2, \lambda+3$, 所以 A 的若当标准形为

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I 证明题

一 λ -矩阵的标准形

利用初等变换化得标准形，或者求得不变因子，进而得到标准形。

例 1 证明：若 $(f(\lambda), g(\lambda)) = 1$ ，则

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix} \text{ 等价.}$$

证明 1 因为 $(f(\lambda), g(\lambda)) = 1$ ，所以存在多项式 $u(\lambda)$ ， $v(\lambda)$ ，使 $f(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda)v(\lambda) = 1$ 。作初等变换

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} f(\lambda) & f(\lambda)u(\lambda) \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f(\lambda) & \underbrace{f(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda)v(\lambda)}_{g(\lambda)} \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} f(\lambda) & 1 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f(\lambda)g(\lambda) & g(\lambda) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

证明 2 因为 $(f(\lambda), g(\lambda)) = 1$ ，所以 $\widetilde{D_1(\lambda)} = 1$ 。又， $D_2(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$ 。根据行列式因子与不变因子的关系，得到标准形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}.$$

二 行列式因子、不变因子、初等因子

根据行列式因子、不变因子、初等因子的定义及其相互关系，进行证明。

例 2 证明： n 阶矩阵 A 是一个数量矩阵 $\Leftrightarrow \lambda E - A$ 的 $n-1$ 阶行列式因子 $D_{n-1}(\lambda)$ 是 $n-1$ 次的 ($n > 1$)。

证明 \Rightarrow ：设 A 是一个数量矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & \ddots \\ & & & a \end{pmatrix}, \quad \text{则} \quad \lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - a & & \\ & \lambda - a & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda - a \end{pmatrix}.$$

于是， $D_{n-1}(\lambda) = (\lambda - a)^{n-1}$ 是 $n-1$ 次的。

\Leftarrow ：设 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$ 是 $\lambda E - A$ 的不变因子，则由不变因子与行列式因子的关系得到 $D_n(\lambda) = d_1(\lambda) \cdots d_{n-1}(\lambda)d_n(\lambda) = D_{n-1}(\lambda)d_n(\lambda)$ 。由于 $D_{n-1}(\lambda)$ 是 $n-1$ 次的，

所以 $d_n(\lambda)$ 是一次的. 设 $d_n(\lambda) = \lambda - a$, 则由 $d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda)$, $i=1, 2, \dots, n-1$, 得到 $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \dots = d_{n-1}(\lambda) = \lambda - a$. 从而, $\lambda E - A$ 就与

$$\begin{pmatrix} \lambda - a & & & \\ & \lambda - a & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda - a \end{pmatrix} = \lambda E - aE$$

等价, 所以 $A \sim aE$. 因此 $A = aE$.

例 3 设 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$ 是 A 的特征矩阵 $\lambda E - A$ 的不变因子, 而 $p_1^{k_1}(\lambda), p_2^{k_2}(\lambda), \dots, p_s^{k_s}(\lambda)$ 为其在数域 F 上的全部初等因子. 证明:

$$d_n(\lambda) = (p_1^{k_1}(\lambda), p_2^{k_2}(\lambda), \dots, p_s^{k_s}(\lambda)).$$

证明 因为 $d_i(\lambda) | d_n(\lambda)$, $i=1, 2, \dots, n$, 而每个初等因子必为某个不变因子的因子, 所以 $p_i^{k_i}(\lambda) | d_n(\lambda)$, $i=1, 2, \dots, s$. 从而 $(p_1^{k_1}(\lambda), p_2^{k_2}(\lambda), \dots, p_s^{k_s}(\lambda)) | d_n(\lambda)$. 设 $d_n(\lambda) = q_1^{l_1}(\lambda) q_2^{l_2}(\lambda) \dots q_t^{l_t}(\lambda)$ 是 $d_n(\lambda)$ 在数域 F 上的标准分解式, 则 $q_i^{l_i}(\lambda)$ 必是 $p_1^{k_1}(\lambda), p_2^{k_2}(\lambda), \dots, p_s^{k_s}(\lambda)$ 中的一个, 所以 $q_i^{l_i}(\lambda) | (p_1^{k_1}(\lambda), p_2^{k_2}(\lambda), \dots, p_s^{k_s}(\lambda))$, $i=1, 2, \dots, t$, 再由 $q_1^{l_1}(\lambda), q_2^{l_2}(\lambda), \dots, q_t^{l_t}(\lambda)$ 两两互素得

$$q_1^{l_1}(\lambda) q_2^{l_2}(\lambda) \dots q_t^{l_t}(\lambda) | (p_1^{k_1}(\lambda), p_2^{k_2}(\lambda), \dots, p_s^{k_s}(\lambda)).$$

因此, $d_n(\lambda) = (p_1^{k_1}(\lambda), p_2^{k_2}(\lambda), \dots, p_s^{k_s}(\lambda))$.

例 4 设有 n 阶准对角 λ -矩阵

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} B(\lambda) & 0 \\ 0 & C(\lambda) \end{pmatrix}.$$

证明: 若 $B(\lambda)$ 的任一不变因子都是 $C(\lambda)$ 的所有不变因子的因式, 则 $B(\lambda), C(\lambda)$ 的全部不变因子就是 $A(\lambda)$ 的不变因子.

证明 设 $(b_1(\lambda), \dots, b_s(\lambda), 0, \dots, 0)$

是 $B(\lambda)$ 的标准形, $b_1(\lambda), \dots, b_s(\lambda)$ 是 $B(\lambda)$ 的不变因子,
 $\{c_1(\lambda), \dots, c_t(\lambda), 0, \dots, 0\}$ 是 $C(\lambda)$ 的标准形, $c_1(\lambda), \dots, c_t(\lambda)$ 是 $C(\lambda)$ 的不变因子. 对 $B(\lambda)$ 作初等变换时, $C(\lambda)$ 不受影响; 同样对 $C(\lambda)$ 作初等变换时, $B(\lambda)$ 不受影响. 由已知条件, $b_k(\lambda) | c_k(\lambda)$, 所以

$\{b_1(\lambda), \dots, b_s(\lambda), c_1(\lambda), \dots, c_t(\lambda), 0, \dots, 0\}$
 是 $A(\lambda)$ 的标准形. 因此, $b_1(\lambda), \dots, b_s(\lambda), c_1(\lambda), \dots, c_t(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的不变因子.

例5 设 A, B, A_1, B_1 是 n 阶矩阵, A, A_1 是可逆的, 证明: 存在可逆矩阵 P, Q , 使 $A_1 = PAQ, B_1 = PBQ$ 的必要充分条件是, λ -矩阵 $\lambda A - B$ 与 $\lambda A_1 - B_1$ 有相同的不变因子.

证明 先证必要性. 由于 $A_1 = PAQ, B_1 = PBQ$, 所以,
 $\lambda A_1 - B_1 = P(\lambda A - B)Q$. 又由于 P, Q 是可逆的, 所以
 $\lambda A_1 - B_1$ 与 $\lambda A - B$ 等价, 从而它们有相同的不变因子.

再证充分性. 由于 $\lambda A - B$ 与 $\lambda A_1 - B_1$ 有相同的不变因子,
 A_1, A 是可逆的, 且 $A^{-1}(\lambda A - B) = \lambda E - A^{-1}B$,
 $A_1^{-1}(\lambda A_1 - B_1) = \lambda E - A_1^{-1}B_1$, 所以 $A^{-1}(\lambda A - B)$ 与
 $A_1^{-1}(\lambda A_1 - B_1)$, 即 $\lambda E - A^{-1}B$ 与 $\lambda E - A_1^{-1}B_1$ 等价, 从而,
 $A^{-1}B$ 与 $A_1^{-1}B_1$ 相似. 于是有可逆矩阵 Q , 使 $A_1^{-1}B_1 =$
 $Q^{-1}(A^{-1}B)Q$. 因此, $\lambda A_1 - B_1 = \lambda A_1 - A_1(A_1^{-1}B_1) =$
 $\lambda A_1 - A_1 Q^{-1}(A^{-1}B)Q = \lambda(A_1 Q^{-1} A^{-1})AQ - (A_1 Q^{-1} A^{-1})BQ$
 比较两端, 得 $A_1 = PAQ, B_1 = PBQ$, 其中, $P = A_1 Q^{-1} A^{-1}$.

三 矩阵相似

根据本章所给的矩阵相似的条件进行证明.

例6 证明下列三个矩阵彼此相似($b \neq 0, c \neq 0$):

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & 1 & \lambda_0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & b & \lambda_0 & \\ & & \ddots & \\ & & & b & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \lambda_0 & c & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & c \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

证明 对于 $\lambda E - A$, n 阶子式为 $(\lambda - \lambda_0)^n$, 有一个 $n-1$ 阶子式为 $(-1)^{n-1}$; 对于 $\lambda E - B$, n 阶子式为 $(\lambda - \lambda_0)^n$, 有一个 $n-1$ 阶子式为 $(-b)^{n-1}$; 对于 $\lambda E - C$, n 阶子式为 $(\lambda - \lambda_0)^n$, 有一个 $n-1$ 阶子式为 $(-c)^{n-1}$. 从而, 它们有相同的不变因子 $1, \dots, 1, (\lambda - \lambda_0)^n$. 因此它们彼此相似.

例7 证明: 若矩阵 A 的特征多项式是 $(\lambda - 1)^n$, 则对于任意的自然数 k , A^k 与 A 均相似.

证明 设 $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J(1, t_1) & & \\ & J(1, t_2) & \\ & & \ddots \\ & & & J(1, t_s) \end{pmatrix}$

是 A 的若当标准形, $J(1, t_j)$ 是 t_j 阶若当块, 则有

$$T^{-1}A^kT = \begin{pmatrix} J(1, t_1)^k & & \\ & J(1, t_2)^k & \\ & & \ddots \\ & & & J(1, t_s)^k \end{pmatrix}.$$

考虑 $J(1, t_j)^k$ 的初等因子, $J(1, t_j)^k$ 的特征矩阵是

$$\lambda E_{t_j} - J(1, t_j)^k = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k & \lambda - 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & -k & \lambda - 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & * & \cdots & -k & \lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

其 t_j 阶子式为 $(\lambda - 1)^{t_j}$, 从而 t_j 阶行列式因子为 $(\lambda - 1)^{t_j}$. 它有两个 $t_j - 1$ 阶子式分别为

$$\psi(\lambda) = (\lambda - 1)^{t_j - 1}, \phi(\lambda) = \begin{vmatrix} -k & \lambda - 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & -k & \lambda - 1 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & -k & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & * & \cdots & -k & \lambda - 1 \\ * & * & * & \cdots & * & -k \end{vmatrix},$$

显然 $\phi(1) \neq 0$, 从而 $(\phi(\lambda), \lambda - 1) = 1$, $t_j - 1$ 阶行列式因子为 1 , 因此, $\lambda E_{t_j} - J(1, t_j)^k$ 的不变因子组是 $1, \dots, 1$,

$(\lambda - \lambda_0)^{k+1}$, $\lambda E - T^{-1}AT$ 与 $\lambda E - T^{-1}A^*T$ 等价, $T^{-1}AT$ 与 $T^{-1}A^*T$ 相似, A 与 A^* 相似.

四 若当标准形

利用矩阵的若当标准形的理论、矩阵运算以及特征值等, 进行证明.

例 8 证明: 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix} \quad (a_2 \neq 0)$$

的若当标准形是

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 \end{pmatrix}$$

证明 $\lambda E - A =$

$$\begin{pmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 0 & \lambda - a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - a_1 \end{pmatrix}$$

所以, $D_n(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - a_1)^n$.

下边求 $D_{n-1}(\lambda)$. 在 $\lambda E - A$ 中去掉第一行与第一列得到的 $n-1$ 阶子式 $f_1(\lambda) = (\lambda - a_1)^{n-1}$; 而去掉第 n 行与第一列得到的 $n-1$ 阶子式

$$f_2(\lambda) = \begin{vmatrix} -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ \lambda - a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \\ 0 & \lambda - a_1 & \cdots & -a_{n-3} & -a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_2 & -a_3 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - a_1 & -a_2 \end{vmatrix}.$$

而 $f_2(a_1) = (-a_2)^{n-1} \neq 0$, 所以 $f_2(\lambda)$ 不含因子 $\lambda - a_1$, 从而 $(f_1(\lambda), f_2(\lambda)) = 1$, 因此 $D_{n-1}(\lambda) = 1$, 进而 $\lambda E - A$ 的不变因子是 $1, 1, \dots, 1, (\lambda - a_1)^n$, 初等因子是 $(\lambda - a_1)^n$, 从而 A 的若当标准形是

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

例 9 证明: n 阶矩阵 A 的特征值全是零 \Leftrightarrow 存在自然数 m , 使 $A^m = 0$.

证明 将 n 阶矩阵 A 看作复数域上的矩阵来考察, 从而 A 有若当标准形 $J = (J_1, J_2, \dots, J_s)$, 且 $X^{-1}AX = J$.

\Rightarrow . 由于 A 的特征值全是零, 所以 A 的若当标准形 J 中的若当

块只能是 $J_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

取整数 $m \geq$ 所有 J_i 的阶数, 则由矩阵的乘法易算得 $J_i^m = 0$, 从而 $J^m = 0$, 所以 $A^m = XJ^mX^{-1} = 0$.

\Leftarrow . 由于 $A^m = 0$, 所以 $J^m = 0$, 从而 $J_i^m = 0$. 而 $J_i = J(\lambda_i, t_i)$, J_i^m 的主对角线元素为 $\lambda_i^m, \lambda_i^m, \dots, \lambda_i^m$. 因此, $\lambda_i^m = 0$, 得 $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, s$, 即 A 的特征值全是零.

例 10 证明: 若 A 是数域 F 上的 n 阶矩阵, 且 $A^2 = A$, 则 A 相似于对角形矩阵 $C = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

证明 将 n 阶矩阵 A 看作复数域上的矩阵来考察, 则 A 有若

当标准形 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_s \end{pmatrix}, J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & 1 & \lambda_i \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix},$

即, 有可逆复数矩阵 X , 使 $XA X^{-1} = J$.

由于 $A^2 = A$, 所以 $J^2 = (XA X^{-1})^2 = XA^2 X^{-1} = XA X^{-1} = J$
从而 $J^2 = J$, $J_i^2 = J_i$, $i = 1, 2, \dots, s$, 即

$$\begin{pmatrix} \lambda_i^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2\lambda_i & \lambda_i^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\lambda_i & \lambda_i^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\lambda_i & \lambda_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

所以, 当且仅当 J_i 为 1 阶时上式成立, 且 $\lambda_i^2 = \lambda_i$, 从而 $\lambda_i = 1$ 或 $\lambda_i = 0$. 因此, J 为 一对角形矩阵, 且主对角线上元素只能是 1 或 0, 从而, 在数域 F 上, A 相似于 C .

说明 将数域 F 上的矩阵看作复数域上的矩阵来考察, 是一种重要的思考方法.

§5 补充资料

I λ -矩阵的除法

文字 λ 的矩阵系数多项式是指下面形状的表示式 $F(\lambda) = A_0 \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \cdots + A_m$, 其中 A_0, A_1, \dots, A_m 是数域 F 上的同阶矩阵.

每一个 λ 的矩阵系数多项式都可以写成一个矩阵的形状, 其元素是 λ 的数字系数多项式, 且反之亦然. 所以, λ 的矩阵系数多项式只是 λ -矩阵的一种特殊写法.

在 λ 的矩阵系数多项式中, 若矩阵 $A_0 \neq 0$, 则称 $F(\lambda)$ 是 m 次多项式; 若 A_0 可逆, 则称 $F(\lambda)$ 是正则多项式. λ 的矩阵系数多项式的和的次数不能高于其各被加式的次数的最大数. 两个 λ 的矩阵系数多项式相乘, 若其中至少有一个是正则的, 则乘积的次数恰好等于因子次数的和.

对于任何 λ 的矩阵系数多项式 $A(\lambda)$ 和正则多项式 $B(\lambda)$, 有 λ 的矩阵系数多项式 $P(\lambda), S(\lambda), Q(\lambda), R(\lambda)$ 存在, 且适合下列条件:

$A(\lambda) = B(\lambda)P(\lambda) + S(\lambda)$, $A(\lambda) = Q(\lambda)B(\lambda) + R(\lambda)$, 其中 $S(\lambda) = 0$ 或 $S(\lambda)$ 的次数小于 $B(\lambda)$ 的次数; $R(\lambda) = 0$ 或 $R(\lambda)$ 的次数小于 $B(\lambda)$ 的次数, 并且, 所确定的多项式对是唯一的. $P(\lambda)$, $S(\lambda)$ 称为用 $B(\lambda)$ 除 $A(\lambda)$ 所得的左商和左余, $Q(\lambda)$, $R(\lambda)$ 称为右商和右余.

I Frobenius标准形

下面的 m 阶矩阵 F 称为属于 $d(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m$ 的 Frobenius 块

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_m \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{m-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

设 F_1, F_2, \dots, F_s 是 Frobenius 块, 则称 $F = (F_1, F_2, \dots, F_s)$ 是 Frobenius 形矩阵.

数域 F 上的任意 n 阶矩阵 A 必相似于 F 上的一个 Frobenius 形矩阵 F . 称 F 是 A 的 Frobenius 标准形, 或有理标准形, 或自然标准形.

实际上, 设 $\lambda E - A$ 有 s 个不变因子 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_s(\lambda)$, 它们的次数均 ≥ 1 , 则 $F = (F_1, F_2, \dots, F_s)$ 就是 A 的 Frobenius 标准形, 其中 F_i 属于 $d_i(\lambda)$, 除块的顺序外是唯一的.

II Jacobson标准形

设 $p(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m$ 是数域 F 上的不可约多项式, F 是属于 $p(\lambda)$ 的 Frobenius 块, N 是 m 阶矩阵 (除右上角为 1 外, 其余元素均为零)

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{则 } ms \text{ 阶矩阵 } D = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ N & F & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & N & F & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N & F \end{pmatrix}$$

称为属于 $(p(\lambda))^s$ 的Jacobson块, 其中有 s 个 F 、 $s-1$ 个 N .

设 D_1, D_2, \dots, D_t 是Jacobson块, 则称 $\tilde{J} = (D_1, D_2, \dots, D_t)$ 是Jacobson形矩阵, 或第一广义若当形矩阵.

数域 F 上的任意 n 阶矩阵 A 必相似于 F 上的一个Jacobson形矩阵 \tilde{J} . 称 \tilde{J} 是 A 的Jacobson标准形, 或第一广义若当标准形.

实际上, 设 $\lambda E - A$ 有 t 个初等因子 $p_1^{s_1}(\lambda), p_2^{s_2}(\lambda), \dots, p_t^{s_t}(\lambda)$, D_i 是属于 $p_i^{s_i}(\lambda)$ 的Jacobson块, 则 $\tilde{J} = (D_1, D_2, \dots, D_t)$ 就是 A 的Jacobson标准形.

当所有的 $p_i(\lambda)$ 均为一次时, Jacobson标准形就变为Jordan标准形, “广义”的涵义就在于此.

如上, 作

$$H = \begin{pmatrix} F & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ E & F & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E & F \end{pmatrix}$$

为属于 $(p(\lambda))^s$ 的块, 则得到第二广义Jordan标准形 $\tilde{\tilde{J}} = (H_1, H_2, \dots, H_t)$.

IV 历史资料点滴

西勒维斯特在1851年研究二次曲线和二次曲面的切触和相交时, 需要考虑这种二次曲线和二次曲面束的分类, 而他的分类方法引进了初等因子的概念. 给定二次型 A 和 B , 考察二次型束 $A + \lambda B$ 的行列式 $|A + \lambda B|$, 这是一个以 λ 的多项式为元素的行列式. 西勒维斯特证明, 若 $|A + \lambda B|$ 的任一阶的全部子式有一个公共因子 $\lambda + \epsilon$, 则当 A 和 B 通过变量的同一个线性变换后, 这个因子是同样子式的公因子.

西勒维斯特和魏尔斯特拉斯在行列式研究中建立的不变因子和初等因子概念, 于1878年被弗罗宾纽斯引进矩阵论. 弗罗宾纽斯在对不变因子做了进一步研究后, 以合乎逻辑的形式整理了不变因子和初等因子的理论.

把矩阵化为标准形的问题是若当解决的。若当在1870年的文章中证明，对于任一矩阵，均可找到一个可逆矩阵 T ，使得 $T^{-1}AT$ 成为 A 的若当标准形。

§6 基本习题

1 化 $\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$ 为标准形。

2 求 $A(\lambda)$ 的各阶行列式因子

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3 求 $A(\lambda)$ 的不变因子

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}.$$

4 求下列 λ -矩阵的初等因子与标准形

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - \lambda & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2 - \lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) \\ \lambda \\ (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}.$$

5 设 $A(\lambda)$ 是 5 阶矩阵。若 $A(\lambda)$ 的秩是 4，初等因子是 λ ， λ^2 ， $\lambda-1$ ， $\lambda-1$ ， $\lambda+1$ ， $(\lambda+1)^2$ ， $(\lambda+1)^3$ ，试求 $A(\lambda)$ 的标准形。

6 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是否相似？

7 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 的若当标准形.

8 证明

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_1 \end{pmatrix}$$

的不变因子是 $1, 1, \dots, 1, f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$.

9 设 A 是数域 F 上的 n 阶矩阵, 证明 $A \sim A'$.

10 设有 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \varepsilon & & & \\ & & \varepsilon^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix}$$

其中 ε 是 n 次单位根, 且 $\varepsilon^{n-1} \neq 1$. 证明: J 是 A 的若当标准形.

第九章 欧几里得空间

§1 概括说明

在线性空间中，向量之间的关系表现为加法与数量乘法，统称为线性运算。我们对于线性空间自身的研究，以及对于线性变换、矩阵的研究，都是基于线性运算，并且，仅仅要求线性运算满足八条公理。

众所周知，三维几何空间是一般线性空间的一个具体模型，关于线性空间的概念是从三维几何空间抽象而来的。而且，在这个抽象化过程中，舍弃了三维几何空间向量的许多重要的几何性质。例如，三维几何空间中向量的长度、夹角等与度量有关的性质，在一般的线性空间中没有研究。然而，向量的长度、夹角等度量概念不仅在理论上，而且在实际上都是有重要意义的。本章进一步充实线性空间的概念，把有关的度量概念添到线性空间中去，从而建立欧几里得空间的概念，并且，研究由此而引起的一些理论。

在解析几何中，向量的长度和夹角等度量概念是由向量的内积(称为点乘积或数量积)来刻划的，而且，我们还发现，内积具有明显的代数性质，即适合一些通常的运算定律。于是，我们将内积作为基本概念，推广到一般的线性空间中去。

所谓欧几里得空间，就是一种引进了内积的实数域上的线性空间，简称为欧氏空间。

欧氏空间的理论对于解析几何的研究有指导意义，在泛函分析、多元分析中有广泛应用，而且，下面我们就将看到，内积概

念对于代数学自身，例如对于对称矩阵的研究等，也有直接的意义。

本章的内容分为六个部分：欧氏空间的基本概念，标准正交基与正交矩阵，正交变换，正交补、正射影、最小平方偏差，对称变换与实对称矩阵，酉空间。

欧氏空间的基本概念首先是向量的内积，而后，用内积来定义向量的长度、向量间的夹角、向量间的距离、向量正交等概念。

与线性空间的理论一样，我们主要讨论有限维欧氏空间。解析几何中直角坐标系的实际背景，启发我们建立标准正交基的概念。我们将证明标准正交基的存在性，给出标准正交基的求法，讨论两个标准正交基之间的关系，引入正交矩阵的概念。标准正交基的意义在于，在标准正交基之下，向量的坐标、内积、长度、距离都有简单的表达式。并且，利用标准正交基给出，两个有限维欧氏空间同构的必要充分条件是它们的维数相等。

在欧氏空间中，将线性变换与内积结合起来，得到正交变换的概念。这是解析几何中保持长度不变的变换的推广。

欧氏空间 V 的线性子空间 W 对于 V 的内积也作成欧氏空间。从而，可以讨论欧氏空间的子空间的正交关系，建立正交补的概念，进一步建立正射影的概念，研究最小平方偏差问题。

欧氏空间的另一类重要的线性变换是对称变换。对称变换的理论是泛函分析的一个重要内容。我们研究有限维欧氏空间的对称变换的性质，并且得到实对称矩阵正交相似于对角形的结论，对实二次型的化简再给出新的方法及结果。

在复线性空间中引进内积，得到酉空间。类似于欧氏空间，有一套相应的结论。

本章的补充资料是：格兰姆矩阵、广义阿达马不等式，共轭变换、正规变换，一般变换的分解，历史资料点滴。

§2 内容提要

I 欧氏空间的基本概念

一 定义与简单性质

设 V 是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间, 对于 V 中任意两个向量 α 与 β , 有唯一确定的实数, 记为 (α, β) , 与之对应. 若 (α, β) 满足: 1) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$; 2) $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$; 3) $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$; 4) $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 而等号成立当且仅当 $\alpha = 0$; 其中 α, β, γ 是 V 中任意向量, k 是 \mathbf{R} 中任意数, 则称 (α, β) 是 α 与 β 的内积, 称在 V 上定义了一个内积.

若实数域 \mathbf{R} 上的线性空间 V 中定义了一个内积, 则称 V 是 欧几里得空间, 简称为欧氏空间.

在线性空间 \mathbf{R}^n 中, 对于向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 定义 $(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$, 则这是 \mathbf{R}^n 的一个内积, 从而 \mathbf{R}^n 作成欧氏空间, 称这种内积为 通常意义下的内积.

$C[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上一切实连续函数作成的线性空间, 对于 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, 定义 $(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$, 则这是 $C[a, b]$ 的一个内积, 从而 $C[a, b]$ 作成欧氏空间.

欧氏空间 V 的内积有下列简单性质:

$$1) (0, \alpha) = 0, \quad \forall \alpha \in V;$$

$$2) (\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V, \quad \forall k \in \mathbf{R};$$

$$3) (\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma), \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in V;$$

$$4) \left(\sum_{i=1}^m a_i \alpha_i, \sum_{j=1}^n b_j \beta_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j (\alpha_i, \beta_j),$$

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in V,$$

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbf{R}.$$

二 长度与夹角

设 α 是欧氏空间 V 的一个向量, 非负实数 (α, α) 的算术平方根 $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 称为 α 的长度(模), 记作 $|\alpha|$. 长度为1的向量称为单位向量.

向量的长度有下列性质: 1) 长度 $|\alpha|$ 是存在且唯一的; 2) $|\alpha| \geq 0$, $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$; 3) $|k\alpha| = |k||\alpha|$, 对任意 $\alpha \in V$, 任意 $k \in \mathbf{R}$; 4) 若 $\alpha \neq 0$, 则 $|\alpha|^{-1}\alpha$ 是单位向量, 称为将 α 单位化.

定理(柯西-布涅柯夫斯基). 对于欧氏空间 V 中的任意向量 α, β , 成立不等式 $|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta|$, 当且仅当 α, β 线性相关时, 等号成立.

由定理得到下面两个著名的不等式:

$$1) |a_1b_1 + \cdots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}, \\ \forall a_1, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbf{R};$$

$$2) \left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \forall f(x), g(x) \in C[a, b].$$

对于欧氏空间 V 中的任意两个向量 α 与 β , 成立所谓三角不等式: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, $|\alpha - \beta| \geq ||\alpha| - |\beta||$.

欧氏空间 V 中的两个非零向量 α, β 的夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 规定为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}.$$

夹角具有如下性质: 1) $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 时, $\langle \alpha, \beta \rangle$ 存在且唯一, 2) $0 \leq \langle \alpha, \beta \rangle \leq \pi$; 3) $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$; 4) 若 $\alpha \neq 0$, 则 α 与 $|\alpha|^{-1}\alpha$ “同方向”, 即 $\langle \alpha, |\alpha|^{-1}\alpha \rangle = 0$.

三 距离

设 α, β 是欧氏空间 V 的向量. α, β 之间的距离指的是向量 $(\alpha - \beta)$ 的长度, 记作 $d(\alpha, \beta)$. 即, $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$.

距离具有下列性质: 1) $d(\alpha, \beta) \geq 0$, $d(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$;

2) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$; 3) $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)$.

四 正交

设 α, β 是欧氏空间 V 中的向量. 若 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α, β 正交或相互垂直, 记作 $\alpha \perp \beta$.

正交具有下列简单性质: 1) 当 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 时, $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\pi}{2}$; 2) $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \beta \perp \alpha$; 3) 零向量与任意向量正交; 4) $\alpha \perp \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$; 5) 若 α 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 均正交, 则 α 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的任一线性组合正交; 6) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 两两正交, 则对于任意的 $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbf{R}$, $k_1\alpha_1, k_2\alpha_2, \dots, k_s\alpha_s$ 两两正交.

若 α, β 正交, 则 $|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 两两正交, 则 $|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_s|^2$.

设有欧氏空间 V 的一组非零向量. 若向量个数 ≥ 2 , 且两两正交, 则称为正交向量组; 若向量个数 $= 1$, 则也称为正交向量组. 正交向量组是线性无关的.

II 标准正交基与正交矩阵

一 度量矩阵

设 V 是 $n (n > 0)$ 维欧氏空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一组基. 对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 有 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$, $\beta = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \dots + y_n\alpha_n$, 从而

$$(\alpha, \beta) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i, \sum_{j=1}^n y_j \alpha_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (\alpha_i, \alpha_j).$$

因此, 内积完全由一组基向量的内积所决定.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组基. 若记 $a_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$, 则 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 称为基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的度量矩阵.

若 A 是基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的度量矩阵, 向量 α, β 在该基下的坐标分别是 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 则有

$$(\alpha, \beta) = X A Y', \quad |\alpha| = \sqrt{X A X'}.$$

度量矩阵有如下性质：1) 度量矩阵是正定矩阵；2) 不同基的度量矩阵是合同的；3) 内积由度量矩阵完全决定；4) 对于不同基的度量矩阵，所确定的内积 (α, β) 是相等的。

取定 $n(n > 0)$ 维欧氏空间 V 的一组基之后，对于 V 的每一个内积都有唯一确定的正定矩阵 A 与之对应， A 就是该组基的度量矩阵；反之，任给一个正定矩阵 $A = (a_{ij})$ ，对于任意的 $\alpha, \beta \in V$ ，定义 $(\alpha, \beta) = X A Y'$ ，其中 X, Y 分别为 α, β 在该基下的行坐标，则这是 V 的一个内积，由 A 唯一确定。因此，在这种意义下，就建立了欧氏空间 V 的内积集合与正定矩阵集合之间的一个双射，即一一对应。从而，同一个实线性空间可以定义无穷多个内积。

二 标准正交基

若一组基中的向量有正交的，则计算内积将会简单些，从而促使我们寻找一种特殊的基，称为标准正交基。因为正交向量是线性无关的，所以， $n(n > 0)$ 维欧氏空间中两两正交的向量的个数至多是 n ，从而，建立标准正交基是可以实现的。

欧氏空间 V 中，由单位向量组成的正交组称为标准正交组。由正交组构成的基称为正交基。由标准正交组构成的基称为标准正交基。

设 V 是 $n(n > 0)$ 维欧氏空间， $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基，任意 $\alpha, \beta \in V$ ， $\alpha = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_n \varepsilon_n$ ， $\beta = y_1 \varepsilon_1 + y_2 \varepsilon_2 + \dots + y_n \varepsilon_n$ ，则下列诸条相互等价：1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组标准正交基；2) 当 $i = j$ 时， $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 1$ ，当 $i \neq j$ 时， $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ ， $i, j = 1, 2, \dots, n$ ；3) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的度量矩阵是单位矩阵；4) $x_i = (\alpha, \varepsilon_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ；5) $(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ ；6) $|\alpha|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ 。

因为 n 阶正定矩阵均与单位矩阵合同，所以， $n(n > 0)$ 维欧氏空间 V 的标准正交基是存在的，并且，可以具体写出关系式，求

出标准正交基。另外，下面的几个定理从逐步扩充的角度求出标准正交基，证明标准正交基的存在性：

1) 若 $m < n$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 V 的正交组，则存在 $\alpha \in V$, 使 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha$ 是 V 的正交组，并且

$$\alpha = \beta - \frac{(\beta, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1 - \dots - \frac{(\beta, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m$$

其中， β 是任一个使 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性无关的向量。

2) $n(n > 0)$ 维欧氏空间 V 中的任一个正交向量组都能扩充成 V 的一组正交基。

3) 若 $m < n$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ 是 $n(n > 0)$ 维欧氏空间 V 的一组标准正交基，则存在单位向量 $\varepsilon \in V$, 使 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon$ 是 V 的一组标准正交基。

4) $n(n > 0)$ 维欧氏空间 V 中的任一个标准正交组都能扩充成 V 的一组标准正交基。

5) 对于 $n(n > 0)$ 维欧氏空间 V 的任一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 都可以找到 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 使得 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 从而， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的过渡矩阵是上三角形的，且主对角线上的元素为正数。

上面的1)中，实际上给出了由 V 的任一组基求出 V 的一组标准正交基的方法，称为施密特正交化过程。这一方法是有规律性的，可以用计算机来实现。

关于标准正交基的讨论是在欧氏空间中进行的，即在事先确定的内积下进行讨论。若不是这样，则问题变得十分简单：设 V 是 $n(n > 0)$ 维实线性空间， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的任一组基，则可以适当地规定 V 的内积，使 V 成为欧氏空间，并且，使 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 成为 V 的一组标准正交基。实际上，只要规定：当 $i = j$ 时， $(\alpha_i, \alpha_j) = 1$ ；当 $i \neq j$ 时， $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ ，就可以了。

三 正交矩阵

研究欧氏空间的不同标准正交基之间的关系，就引出了正交矩阵的概念。

设 A 是 n 阶实矩阵。若 $A' A = E$ ，则称 A 是一个正交矩阵。

正交矩阵有下列性质：1)正交矩阵是可逆矩阵，且其逆矩阵为正交矩阵；2)正交矩阵的行列式等于 $+1$ 或 -1 ；3)正交矩阵的乘积是正交矩阵；4)正交矩阵的伴随矩阵是正交矩阵；5)三角形的正交矩阵必为对角形的矩阵，且主对角线上的元素为 $+1$ 或 -1 。

设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶实矩阵，则下列诸条等价：1) $A' A = E$ ；2) $A^{-1} = A'$ ；3) $A A' = E$ ；4)行关系： $a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn} = 1 (i=j)$ 或 $0 (i \neq j)$ ；5)列关系： $a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = 1 (i=j)$ 或 $0 (i \neq j)$ 。

关于标准正交基与正交矩阵的关系，有下面的：1)标准正交基之间的过渡矩阵是一个正交矩阵；反之，任一个正交矩阵，总是可以作为某两组标准正交基之间的过渡矩阵。2)设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组标准正交基，且 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A$ ，则 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是 V 的一组标准正交基 $\Leftrightarrow A$ 是一正交矩阵。

由施密特正交化过程，容易得到下面的一些结论：1) 设 A 是 n ($n > 0$) 维欧氏空间 V 的一组基的度量矩阵 (A 是正定矩阵)，则存在一个主对角线元素为正数的上(下)三角形矩阵 Q ，使 $A = Q' Q$ 。2) 对于任一 n 阶可逆实矩阵 A ，必存在一个正交矩阵 T 与一个主对角线元素为正数的上三角形矩阵 Q ，使 $A = TQ$ ，且 T 与 Q 由 A 唯一决定。3) 对于任一 n 阶可逆实矩阵 A ，必存在一正交矩阵 U 与一个主对角线元素为正数的下三角矩阵 K ，使 $A = KU$ ，且 U 与 K 由 A 唯一决定。

四 欧氏空间的同构

设 V 与 V' 是欧氏空间。若有 V 到 V' 的双射 σ ，使得对于任意

$\alpha, \beta \in V$ 及任意 $k \in \mathbb{R}$, 均成立: 1) $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$, 2) $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$, 3) $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$, 则称 σ 是 V 到 V' 的同构映射, 称 V 与 V' 同构, 记作 $V \stackrel{\sigma}{\simeq} V'$, 简记作 $V \simeq V'$.

欧氏空间的同构具有反身性、对称性、传递性. 任意 n 维欧氏空间 V 均与欧氏空间 \mathbb{R}^n (通常意义下的内积) 同构. 两个有限维欧氏空间同构的必要充分条件是它们的维数相等. 于是, 从抽象的观点看, 欧氏空间的同构完全被其维数决定. 同构的欧氏空间被认为是相同的. 从而, 欧氏空间 \mathbb{R}^n (通常意义下的内积) 可以作为 n 维欧氏空间的代表.

II 正交变换

设 σ 是欧氏空间 V 的线性变换. 若对于任意 $\alpha \in V$, 有 $|\sigma(\alpha)| = |\alpha|$, 则称 σ 是一个正交变换. 欧氏空间 V 的单位变换 T_e 是正交变换. 设 η 是欧氏空间 V 的一单位向量, 定义 $\sigma: \sigma(\alpha) = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta, \forall \alpha \in V$, 则 σ 是一个正交变换, 称为镜面反射, 且 $\sigma^2 = T_e$.

欧氏空间 V 的正交变换有下列简单性质: 1) V 的正交变换 σ 是 V 到 V 的单射; 2) 若 V 的正交变换 σ 有特征值 λ_0 , 则 $\lambda_0 \neq 0$; 3) V 的正交变换的特征值是 $+1$ 或 -1 ; 4) V 的两个正交变换的乘积是 V 的正交变换; 5) V 的正交变换保持夹角、距离不变; 6) 对于 V 的任意两个不同的单位向量 ε 与 η , 存在 V 的一个镜面反射 σ , 使 $\sigma(\varepsilon) = \eta$.

设 σ 是欧氏空间 V 的线性变换, 则下列诸条相互等价: 1) σ 保持长度不变, 即, 对于任意 $\alpha \in V$, 有 $|\sigma(\alpha)| = |\alpha|$; 2) σ 保持距离不变, 即, 对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 有 $d(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = d(\alpha, \beta)$; 3) σ 保持内积不变, 即, 对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 有 $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$; 4) σ 保持单位向量的内积不变, 即, 对于任意单位向量 $\varepsilon, \eta \in V$, 有 $(\sigma(\varepsilon), \sigma(\eta)) = (\varepsilon, \eta)$; 5) σ 保持单位向量的长度不变, 即, 对于任意单位向量 $\varepsilon \in V$, 有 $|\sigma(\varepsilon)| = |\varepsilon| = 1$.

当 σ 是 $n(n > 0)$ 维欧氏空间 V 的线性变换时, 还有下列诸条也

等价：6)对于 V 的任一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，有 $(\sigma(\alpha_i), \sigma(\alpha_j)) = (\alpha_i, \alpha_j)$ ， $i, j = 1, 2, \dots, n$ ；7)若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的任一标准正交基，则 $\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \dots, \sigma(\varepsilon_n)$ 也是 V 的一标准正交基；8) σ 在 V 的任一标准正交基下的矩阵是正交矩阵。

$n(n > 0)$ 维欧氏空间 V 的正交变换还有下列性质：1) V 的正交变换 σ 是 V 到 V 的双射，从而，是 V 到 V 的同构映射；2) V 的正交变换 σ 是可逆的，并且，其逆变换 σ^{-1} 也是正交变换；3) V 的正交变换 σ 的特征值 λ_0 与 $1/\lambda_0$ 成对出现；4) V 的正交变换 σ 的行列式等于 $+1$ 或 -1 。若等于 $+1$ ，则称 σ 是第一类的；若等于 -1 ，则称 σ 是第二类的。镜面反射是第二类的正交变换；5) V 的任一正交变换可以表示为一系列镜面反射的乘积；6)若 V 的正交变换 σ 以 1 作为一个特征值，且属于特征值 1 的特征子空间的维数为 $n-1$ ，则 σ 是镜面反射；7)第二类正交变换一定以 -1 作为它的一个特征值；8)奇数维欧氏空间的第一类正交变换一定以 1 作为它的一个特征值。

下面给出正交变换的几何意义：1)二维几何空间 V_2 的一个正交变换或者是旋转，或者是对一条直线的反射。前者是第一类正交变换，后者是第二类正交变换。2)三维几何空间 V_3 的一个正交变换或者是绕直线的旋转，或者是对于平面的反射，或者是这两者的合成。在第一种情形是第一类正交变换，在后两种情形是第二类正交变换。

$n(n > 0)$ 维欧氏空间 V 中存在标准正交基，使 V 的正交变换 σ 在该基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & \\ & & & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \cos \theta_r & -\sin \theta_r \\ & & & & & \sin \theta_r & \cos \theta_r \end{pmatrix}.$$

其中 $\lambda_i = 1$ 或 -1 , $i=1, 2, \dots, k$.

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 是欧氏空间 V 的两个向量组, 则存在 V 的正交变换 σ , 使 $\sigma(\alpha_i) = \beta_i$, $i=1, 2, \dots, m \Leftrightarrow (\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j)$, $i, j=1, 2, \dots, m$.

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是欧氏空间 V 的两标准正交基, 则存在 V 的正交变换 σ , 使 $\sigma(\alpha_i) = \beta_i$, $i=1, 2, \dots, n$.

IV 正交补、正射影、最小平方偏差

一 子空间的正交关系

欧氏空间 V 的子空间 W 对于 V 的内积来说也作成欧氏空间.

设 W, S 是欧氏空间 V 的非空子集. 若对于任意 $\alpha \in W$, 任意 $\beta \in S$, 均有 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 W 与 S 正交, 记作 $W \perp S$. 若向量 α 与 W 的任意向量正交, 则称 α 与 W 正交, 记作 $\alpha \perp W$.

设 W, S 是欧氏空间 V 的子空间. 若 $W \perp S$, 则 $W \cap S = \{0\}$, 从而, $W + S$ 是直和. 若 W_1, W_2, \dots, W_l 是欧氏空间 V 的两两正交的子空间, 则和 $W_1 + W_2 + \dots + W_l$ 是直和.

欧氏空间 V 中与向量 α 正交的一切向量作成 V 的一个子空间. V 中与非空子集 W 正交的一切向量作成 V 的一个子空间.

二 正交补

设 W 是欧氏空间 V 的子空间. 若存在 V 的子空间 S , 使得 $W \perp S$, 且 $W + S = V$, 则称 S 是 W 的一个正交补. 若欧氏空间 V 的子空间 W 有正交补, 则其正交补唯一, 记作 W^\perp .

正交补有如下性质: 1) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$; 2) $(W^\perp)^\perp = W$; 3) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$; 4) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp \Leftrightarrow (W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

设 W 是欧氏空间 V 的有限维子空间, 则 W 的正交补 W^\perp 存在, 且 $W^\perp = \{x | x \in V, x \perp W\}$. 换言之, W 的正交补恰由所有与 W 正交的向量组成. 特别地, 当欧氏空间 V 是有限维时是如此, 而且 $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$. 必须指出, 当 W 是无限维时, 结

论不成立.

当取定 W 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 之后, 容易由上述 W^\perp 的结构, 将 W^\perp 确定出来.

三 正射影

设 W 是欧氏空间 V 的子空间, W^\perp 存在, $V = W \oplus W^\perp$, 对任意 $\alpha \in V$, 有 $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta \in W$, $\gamma \in W^\perp$, 则称 β 是向量 α 在子空间 W 上的正射影, 也称内射影.

设 W 是欧氏空间 V 的子空间, W^\perp 存在, $\alpha \in V$, 则有: 1) 若 β 是 α 在 W 上的正射影, 则 $(\alpha - \beta) \perp W$, 且对于任意 $\beta' \in W$, 有 $|\alpha - \beta'|^2 = |\alpha - \beta|^2 + |\beta - \beta'|^2$; 2) β 是 α 在 W 上的正射影 \Leftrightarrow 对任意 $\beta' \in W$, 成立 $|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \beta'|$, 而且, 等号成立当且仅当 $\beta' = \beta$.

α 在 W 上的正射影, 有明显的几何意义. 当 V 是三维几何空间时, α 在 W 上的正射影, 就是“点” α 在平面 W 上的正射影, $\alpha - \beta$ 就是由“点” α 到 W 的垂线, $|\alpha - \beta|$ 就是“点” α 到平面 W 的最短距离.

当 W 是有限维子空间时, α 在 W 上的正射影是存在且唯一的, 并且, 可以具体地求出来.

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 W 的任一组基, 则向量 $\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_m \alpha_m$ 是向量 α 在 W 上的正射影 $\Leftrightarrow x_1, x_2, \dots, x_m$ 为下列线性

方程组的解:
$$\sum_{j=1}^m (\alpha_i, \alpha_j) x_j = (\alpha, \alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

四 最小平方偏差问题

设 β 是 α 在子空间 W 上的正射影, 则对于任意 $\beta' \in W, \beta' \neq \beta$, 成立 $|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta'|$. 因此, 把正射影 β 称为 W 到 α 的最佳逼近. 而求 β , 也就是要找使得 $(d(\alpha, x))^2 = |\alpha - x|^2$ (任意 $x \in W$) 最小的 $x = \beta$, 称为最小平方偏差问题.

1 最小二乘法

在生产实践与科学实验中遇到的某些问题所归结出来的数学模型，往往是一个没有解的 $m \times n$ 线性代数方程组（称为矛盾方程组），讨论这一类方程组具有较大的实际意义。矛盾方程组常常是这样归结出来的：根据某些科学规律或预测，量 b （实数）与量 a_1, a_2, \dots, a_n （都是实数）之间存在着线性关系式

$$b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n, \quad (1)$$

这个关系式可能是（相对地）精确的，也可能是近似的，关系式中的 x_1, x_2, \dots, x_n 是未知的常系数（实数），它们可以由对 $a_1, a_2, \dots, a_n; b$ 进行一系列测试决定出来，设对 $a_1, a_2, \dots, a_n; b$ 进行了 m 次测试，测试出来的数据是 $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}; b_i$ （ $i=1, 2, \dots, m$ ），则由关系式（1）可知成立下面各式：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

或者 $AX=B$ (3)

其中 $A=(a_{ij})_{m \times n}$ 是（2）的系数矩阵， $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)'$ ， $B=(b_1, b_2, \dots, b_m)'$ 。

现在的问题是要求出 X 。由于对关系式（1）的认识的局限性（可能没有归结好），以及测试仪器产生的测量误差，所以，方程组（2）或（3）总是一个矛盾方程组，要谈它的精确解是不可能的，反而是无意义的。因此，只能这样找 X ，使 AX 尽可能接近 B 。用式子表示，也就是要求 X 的最佳近似值 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)'$ ，使

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \right)^2 \quad (4)$$

（总体）的值最小。这种意义下得到的解称为矛盾方程组 $AX=B$ 的最小二乘解。

一般说来， m 恒大于 n ，即测量次数恒多于量 a_1, a_2, \dots, a_n 的个数，这样可以提高 X 的精确度。

下面具体给出求 X 的方法.

记 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 都是 m 维列向量, 则上述问题((4)式)就归结为: 找 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)'$, 使 $|B-(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_n\alpha_n)|^2$ 最小, 或者 $|B-AX|^2$ 最小. 即, 求欧氏空间 R^m 中向量 B 到子空间 $W=L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 的最短距离. 这个最小平方偏差问题就称为最小二乘方问题, 解决这一问题的方法就称作最小二乘法.

设 $C=B-AX$, 则 $C \perp W$. 因此, 当且仅当

$$(C, \alpha_1)=(C, \alpha_2)=\dots=(C, \alpha_n)=0,$$

$$\text{即} \quad \alpha_1' C = \alpha_2' C = \dots = \alpha_n' C = 0 \quad (5)$$

$$\text{亦即} \quad A'(B-AX)=0, \quad A'AX=A'B \quad (6)$$

于是 $AX=B$ 的最小二乘解可以由相容的方程组(6)的诸解中找出. 特别地, 当 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关时, $A'A$ 可逆, 此时,

$$(6) \text{ 有唯一解} \quad X=(A'A)^{-1}A'B \quad (7)$$

则(7)自然就是最小二乘解.

2 函数的逼近问题

考虑 $(0, 2\pi)$ 上的一切连续实函数所作成的欧氏空间 $C(0, 2\pi)$ (I中的例子). 设 W 是由下面 $2n+1$ 个函数 $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx$ 所生成的子空间. 利用施密特正交化方法, 求出 W 的一标准正交基 $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \dots, \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \beta_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$. 于是, W 的每个元素都可以写成 $p_n(x) = a_0/2 + a_1\cos x + b_1\sin x + \dots + a_n\cos nx + b_n\sin nx$ (*)的形状. $p_n(x)$ 称为一个 n 次三角多项式.

设 $f(x) \in C(0, 2\pi)$, 求一 $p_n(x)$, 使得 $\int_0^{2\pi} (f(x) - p_n(x))^2 dx$

的值最小, 也就是 $|f(x) - p_n(x)|^2 = \int_0^{2\pi} (f(x) - p_n(x))^2 dx$ 的值最小. 这就是 W 对 $f(x)$ 的最佳逼近问题, 因此, 所求的 $p_n(x)$ 应该

是 $f(x)$ 在 W 上的正射影. 易得 $p_n(x) = (f, \alpha_0)\alpha_0 + (f, \alpha_1)\alpha_1 + (f, \beta_1)\beta_1 + \cdots + (f, \alpha_n)\alpha_n + (f, \beta_n)\beta_n$. 与(*)比较, 得到

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f, \alpha_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f, \alpha_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx;$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f, \beta_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx;$$

因为 $\cos 0x = 1$, 所以, 可以写为

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k=0, 1, 2, \cdots, n,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k=1, 2, \cdots, n.$$

$a_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n$ 称为 $f(x)$ 的富立叶系数.

V 对称变换与实对称矩阵

一 对称变换与实对称矩阵

设 σ 是欧氏空间 V 的一个线性变换. 若对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 均有 $(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma(\beta))$, 则称 σ 是 V 的一个对称变换.

对称变换有下列简单性质: 1) Te 是对称变换; 2) 实数 k 与对称变换 σ 的乘积 $k\sigma$ 是对称变换; 3) 两个对称变换的和是对称变换; 4) 欧氏空间 V 的变换 σ 是对称变换 \Leftrightarrow 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 成立 $(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma(\beta))$.

设 σ 是 $n(n>0)$ 维欧氏空间 V 的一个线性变换. 若 σ 是 V 的一个对称变换, 则 σ 在 V 的任一标准正交基下的矩阵是实对称矩阵. 反之, 若 σ 在 V 的某一标准正交基下的矩阵是实对称矩阵, 则 σ 是 V 的一个对称变换. 简言之, σ 是对称变换的必要充分条件是 σ 在 V 的任一标准正交基下的矩阵是对称矩阵.

设 M 是 n 维欧氏空间 V 的所有对称变换的集合, N 是所有 n 阶实对称矩阵的集合. 若 V 中取定一组标准正交基, 且使 V 的对称变换 σ 与 σ 在该基下的矩阵对应. 则得到 M 到 N 的一个双射.

$n(n>0)$ 维欧氏空间 V 的两个对称变换 σ_1, σ_2 的乘积 $\sigma_1\sigma_2$ 是对称变换 $\Leftrightarrow \sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1$.

二 特征值与特征向量

实对称矩阵的特征值都是实数.从而, n 阶实对称矩阵有 n 个实特征值(重特征值按重数来计算).

$n(n>0)$ 维欧氏空间 V 的任一对称变换至少有一个特征值.

设 σ 是欧氏空间 V 的对称变换, W 是 V 的子空间, W^\perp 存在.若 W 是 σ 的不变子空间,则 W^\perp 也是 σ 的不变子空间.

设 σ 是 $n(n>0)$ 维欧氏空间 V 的对称变换, λ_0 是 σ 的一个特征值, α 是属于 λ_0 的特征向量.若 $M=\{x|x\in V, \text{且} x\perp\alpha\}$,则 M 是 σ 的不变子空间,且 $\dim M=n-1$.

设 σ 是 $n(n>0)$ 维欧氏空间 V 的一个对称变换,则 σ 有 n 个特征向量作成 V 的一组标准正交基.从而, σ 在该基下的矩阵是对角形矩阵,主对角线上的元素就是 σ 的全部特征值(重特征值按重数计算).

设 σ 是 $n(n>0)$ 维欧氏空间 V 的一个对称变换,则 V 可以分解为两两正交的 σ 的一维不变子空间的直和.

设 σ 是 $n(n>0)$ 维欧氏空间 V 的一个对称变换, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 是 σ 的全部互异的特征值,则从每个特征子空间 V_{λ_i} 中各取一组标准正交基,即可合并成 V 的一组标准正交基,且 σ 在该组基下的矩阵是对角形.

三 实对称矩阵正交对角化

对于任一 n 阶实对称矩阵 A ,都存在一个 n 阶正交矩阵 T ,使 $T'AT=T^{-1}AT$ 成对角形,主对角线上的元素就是 A 的全部特征值(重特征值按重数计算).

求正交矩阵 T 和对角形 $T'AT=T^{-1}AT$,称为正交对角化.按下列步骤进行: 1)求 A 的特征值.设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 是 A 的全部不同的特征值; 2)对于每个 λ_i ,求齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)X$

$= 0$ 的一基础解系, 这就是 A 的特征子空间 V_{λ_i} 的一组基. 由 V_{λ_i} 的这组基出发, 施行施密特正交化过程, 得到 V_{λ_i} 的一组标准正交基 $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \dots, \varepsilon_{ik_i}$; 3) 以 $\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1k_1}, \dots, \varepsilon_{r1}, \dots, \varepsilon_{rk_r}$ 为列作成 T , 则 T 是正交矩阵, 且 $T'AT = T^{-1}AT$ 是对角形矩阵 D , D 的主对角线元素就相应地写为 $\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r$, 其中 λ_1 重复 k_1 次, \dots , λ_r 重复 k_r 次, $k_1 + \dots + k_r = n$.

四 实二次型的正交化简

对于任意一个实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$, 都存在正交矩阵 T , 使得, 经过线性替换 $X = TY$ 化为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$, 其中, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 f 的矩阵 A 的全部特征值 (重特征值按重数计算).

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$ 是一个 n 元实二次型, A 是 f 的矩阵, 则: 1) f 的秩等于 A 的非零特征值的个数, 而 f 的符号差等于 A 的正特征值的个数与负特征值的个数的差; 2) f 是正定二次型, 当且仅当 A 的特征值都是正数.

现在考虑空间直角坐标系中二次曲面方程化简的问题.

二次曲面的一般方程是

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + d = 0.$$

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

则 $X'AX + 2B'X + d = 0$. 经过转轴, 坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

或者 $X = CX_1$, 其中 C 为正交矩阵, 且 $|C| = 1$. 在新坐标系中, 曲面的方程就是 $X_1'(C'AC)X_1 + 2(B'C)X_1 + d = 0$. 我们可以选择正交矩阵 C , $|C| = 1$, 且使

$$C'AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为 A 的特征值.从而,曲面在新坐标系中的方程为

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + 2b_1^* x_1 + 2b_2^* y_1 + 2b_3^* z_1 + d = 0,$$

其中 $(b_1^*, b_2^*, b_3^*) = (b_1, b_2, b_3)C$. 此时, 再按 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是否为零的情况, 并作适当的移轴, 就可以把曲面的方程化成标准方程. 假设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 全不为零, 则作下面的移轴变换

$$x_1 = x_2 - \frac{b_1^*}{\lambda_1}, \quad y_1 = y_2 - \frac{b_2^*}{\lambda_2}, \quad z_1 = z_2 - \frac{b_3^*}{\lambda_3},$$

从而曲面的方程化为 $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 + d^* = 0,$

$$\text{其中 } d^* = d - \frac{b_1^{*2}}{\lambda_1} - \frac{b_2^{*2}}{\lambda_2} - \frac{b_3^{*2}}{\lambda_3}.$$

VI 酉空间

一 酉空间与欧氏空间的对应关系

欧氏空间的理论, 作相应的改变, 就成为酉空间的理论, 二者之间的对应关系罗列如下: 实数 \leftrightarrow 复数; 欧氏空间 \leftrightarrow 酉空间; $A' \leftrightarrow \overline{A'}$; 正交矩阵 \leftrightarrow 酉矩阵; 正交变换 \leftrightarrow 酉变换; 实对称矩阵 \leftrightarrow 厄米特矩阵; 对称变换 \leftrightarrow 厄米特变换; 实二次型 \leftrightarrow 厄米特二次型.

二 酉空间的基本概念

设 V 是复数域 \mathbf{C} 上的线性空间, 对于 V 中任意两个向量 α 与 β , 定义唯一的复数, 记为 (α, β) . 若 (α, β) 满足: 1) $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$ (取共轭复数); 2) $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$; 3) $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$; 4) $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 而等号成立当且仅当 $\alpha = 0$; 其中 α, β, γ 是 V 中任意向量, k 是 \mathbf{C} 中任意数, 则称 (α, β) 是 α 与 β 的内积, 称在 V 上定义了一个内积.

若复数域 \mathbf{C} 上的线性空间 V 中定义了内积, 则称 V 是一个酉空间.

在线性空间 \mathbb{C}^n 中, 对于向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 定义 $(\alpha, \beta) = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \dots + a_n \bar{b}_n$, 则这是 \mathbb{C}^n 的一个内积, 从而 \mathbb{C}^n 作成酉空间.

酉空间的内积具有性质;

$$1) (\alpha, k\beta) = \bar{k} (\alpha, \beta);$$

$$2) \left(\sum_{i=1}^m k_i \alpha_i, \sum_{j=1}^n l_j \beta_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n k_i \bar{l}_j (\alpha_i, \beta_j).$$

$\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 称为 α 的长度, 记作 $|\alpha|$. 当 $|\alpha| = 1$ 时, 称 α 是单位向量.

柯西-布涅柯夫斯基不等式成立. 即, 对酉空间 V 中的任意向量 α, β , 成立 $|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| |\beta|$, 等号成立当且仅当 α, β 线性相关.

设 α, β 是酉空间 V 中的两个向量. 若 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α, β 正交, 记作 $\alpha \perp \beta$.

酉空间 V 中两两正交的非零向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 所组成的向量组线性无关.

三 标准正交基与酉矩阵

在 n 维酉空间 V 中 n 个两两正交的单位向量组成的基称为 V 的一组标准正交基. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是酉空间 V 的一组标准正交基, $\alpha = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_n \varepsilon_n$, $\beta = y_1 \varepsilon_1 + y_2 \varepsilon_2 + \dots + y_n \varepsilon_n$, 则 $x_i = (\alpha, \varepsilon_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $(\alpha, \beta) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n$.

$n(n > 0)$ 维酉空间 V 中任意一组线性无关的向量可以用施密特正交化过程, 并扩充为 V 的一组正交基, 再单位化, 使成为一组标准正交基.

设 A 是 n 阶复矩阵, \bar{A} 表示以 A 的元素的共轭复数作元素的矩阵. 若 $\bar{A}' A = E$, 则称 A 是酉矩阵.

酉矩阵的行列式的模为 1, 酉矩阵的特征值的模为 1. 酉空

间的标准正交基之间的过渡矩阵是酉矩阵。

任意 $n(n>0)$ 维酉空间都与酉空间 \mathbb{C}^n 同构。有限维酉空间同构的必要充分条件是它们的维数相等。

四 酉变换

设 σ 是酉空间 V 的线性变换。若对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 有 $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$, 则称 σ 是 V 的酉变换。恒等变换是酉变换。两个酉变换的乘积是酉变换。可逆酉变换的逆变换是酉变换。

$n(n>0)$ 维酉空间 V 的酉变换 σ 是 V 到 V 的双射, 从而 σ 是 V 到 V 的同构映射。酉变换在标准正交基下的矩阵为酉矩阵。

五 正交补

设 W, S 是酉空间 V 的非空子集。若对于任意 $\alpha \in W$ 与任意 $\beta \in S$, 均有 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 W, S 正交, 记作 $W \perp S$ 。

设 W 是酉空间 V 的子空间。若有 V 的子空间 S , 使得 $W \perp S$, 且 $V = W + S$, 则称 S 是 W 的正交补。若 W 有正交补, 则必唯一, 记作 W^\perp 。 $V = W \oplus W^\perp$ 。设 W 是酉空间 V 的有限维子空间, 则 W^\perp 存在, 并且 $W^\perp = \{x | x \in V, \forall \alpha \in W, (x, \alpha) = 0\}$ 。

六 厄米特变换与厄米特矩阵

设 A 是 n 阶复矩阵。若 $\overline{A'} = A$, 则称 A 是厄米特矩阵。

设 σ 是酉空间 V 的线性变换。若对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 均有 $(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma(\beta))$, 则称 σ 是一个厄米特变换。

厄米特变换在标准正交基下的矩阵是厄米特矩阵。

若 W 是厄米特变换 σ 的不变子空间, 且 W^\perp 存在, 则 W^\perp 也是 σ 的不变子空间。厄米特矩阵的特征值全为实数, 它的属于不同特征值的特征向量必正交。

设 σ 是 $n(n>0)$ 维酉空间 V 的一个厄米特变换, 则 σ 有 n 个特征向量作成 V 的一组标准正交基。

若 A 是厄米特矩阵, 则有酉矩阵 C , 使 $C^{-1}AC = \overline{C'}AC$ 为对角形矩阵, 且主对角线上的元素就是 A 的所有特征值(重特征值

按重数来计算)。

设 $A = (a_{ij})$ 为厄米特矩阵。二次齐次函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \overline{x_j} = \overline{X}' A X$ 称为厄米特二次型。存在酉矩阵 C , 当 $X = CY$ 时, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1 y_1 \overline{y_1} + \lambda_2 y_2 \overline{y_2} + \dots + \lambda_n y_n \overline{y_n}$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值 (重特征值按重数计算)。

§3 重点难点

本章的主题词是: 内积, 欧氏空间, 向量的长度 (模), 单位向量, 柯西-布涅柯夫斯基不等式, 向量的夹角, 三角不等式, 距离, 正交, 正交向量组; 度量矩阵, 正交基, 标准正交基, 施密特正交化过程, 正交矩阵, 欧氏空间的同构; 正交变换, 镜面反射; 正交补, 正射影 (内射影), 最小二乘法, 最佳逼近; 对称变换, 正交对角化; 酉空间, 酉矩阵, 酉变换, 厄米特矩阵, 厄米特变换, 厄米特二次型。

本章的基本方法是: 向量夹角计算法, 度量矩阵求法, 用度量矩阵求内积法, 单位化方法, 正交化方法, 标准正交基求法, 用标准正交基求坐标法, 用标准正交基求内积法, 正交补求法, 正射影求法, 实对称矩阵正交对角化方法, 实二次型正交化简法, 最小二乘法, 厄米特矩阵对角化法, 厄米特二次型化简法。

本章的重点是: 欧氏空间的基本概念, 标准正交基与正交矩阵, 对称变换与实对称矩阵。

内积是欧氏空间的最基本的概念, 利用内积定义了长度、夹角、距离、正交等基本概念, 所有这些, 都作为全章的基础, 因此, 欧氏空间的基本概念, 成为本章的一个重点。

我们主要讨论有限维欧氏空间, 而标准正交基起着根本的作用, 标准正交基贯穿于全章, 成为基本的工具。由于标准正交基

的存在，使得向量的内积、长度、距离等都有了较为明显的表达式。由于研究标准正交基之间的关系而引入的正交矩阵，既作为标准正交基之间的过渡矩阵，又刻划了正交变换的特征。因此，标准正交基与正交矩阵，成为本章的一个重点。

$n(n>0)$ 维欧氏空间的对称变换与 n 阶实对称矩阵密切联系在一起，由于有了欧氏空间的知识，就证明了实对称矩阵的特征值均为实数，找到了对称变换的 n 个线性无关的特征向量组成标准正交基，从而使实对称矩阵正交对角化，也使实二次型正交化简，得到了一些更深刻的结果，因此，对称变换与实对称矩阵，成为本章的一个重点。

本章的难点是：正交变换，正交补，对称变换与实对称矩阵。

正交变换成为本章的一个难点，原因在于：1)正交变换的性质很多，而且有的是特征性质，有的则不是，有的性质因有限维与无限维而异；2) $n(n>0)$ 维欧氏空间的正交变换按其行列式分为两类，不容易理解其本质；3)正交变换的特征值较对称变换要复杂得多；4)二维几何空间 V_2 、三维几何空间 V_3 中的正交变换，其分类与推证也较复杂。解决困难的方法是：1)详细地研究例子 T_e 与镜面反射，熟悉定义；2)通过举反例给以区别，并加深认识；3)详细地研究 V_2 与 V_3 的情况，理解其几何意义。

正交补成为本章的一个难点，原因在于：1)正交补综合了子空间、正交、和、直和几种概念，从而成为较为高级的概念；2)其存在性的证明不易理解与掌握，而且，无限维的情况不成立；3)性质及应用较多，并且较复杂。解决困难的方法是：1)复习子空间、和、直和等概念，作好准备；2)详细地分析正交补的定义，理解“正交”与“补”的含义；3)在理解与应用正交补的过程中，充分发挥直和分解式的作用；4)重点研究 $n(n>0)$ 维欧氏空间的子空间的正交补，并且，注意标准正交基的作用。

对称变换与实对称矩阵，既是本章的一个重点，又是本章的

一个难点, 原因在于: 1) 较多地应用了以前的知识, 综合性较强; 2) 对称变换的实质不易理解; 3) 计算较复杂; 4) 主要定理的证明应用了数学归纳法. 解决困难的方法是: 1) 复习特征值、特征向量、正交化等, 作好准备; 2) 抓住对称变换与实对称矩阵的联系, 通过实对称矩阵来加深理解对称变换; 2) 注意发挥标准正交基的作用; 4) 认真地做一个例子.

§4 习题类解

I 计算题

一 计算内积、长度、夹角、距离

按照定义, 直接进行计算.

例 1 在欧氏空间 R^4 (内积按通常定义) 中, 已知 $\alpha = (2, 1, 3, 2)$, $\beta = (1, 2, -2, 1)$, 求 $|\alpha|$, $|\beta|$, (α, β) , $\langle \alpha, \beta \rangle$, $|\alpha + \beta|$, $d(\alpha, \beta)$.

$$\text{解 } |\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2},$$

$$|\beta| = \sqrt{(\beta, \beta)} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$(\alpha, \beta) = 2 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times (-2) + 2 \times 1 = 0,$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha| |\beta|} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$|\alpha + \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta, \alpha + \beta)} = \sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7},$$

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

二 求度量矩阵、不等式

按照度量矩阵的定义及不同基的度量矩阵之间的关系, 求出度量矩阵.

按照柯西-布涅柯夫斯基不等式及内积的具体意义, 求出相应的不等式.

例 2 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是欧氏空间 V 的一组基, 且 $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = a_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 向量 $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$, $\beta = \sum_{j=1}^n y_j \varepsilon_j$,

试写出基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的度量矩阵, $|\alpha|^2, (\alpha, \beta)$, 柯西-布涅柯夫斯基不等式.

解 基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的度量矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i, \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i, \sum_{j=1}^n x_j \varepsilon_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = X A X', \end{aligned}$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

$$(\alpha, \beta) = X A Y', \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| |\beta| \quad \text{具体写为} \quad |X A Y'| \leq \sqrt{X A X'} \sqrt{Y A Y'}.$$

例 3 在欧氏空间 \mathbf{R}^4 中, 已知基 $\alpha_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (-1, 2, 0, 0)$, $\alpha_3 = (0, 1, 2, 1)$, $\alpha_4 = (1, 0, 1, 1)$ 的

度量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 9 \\ 1 & -1 & 9 & 7 \end{pmatrix},$$

试求基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$ 的度量矩阵.

解 因为, 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = C,$$

所以, 基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 的度量矩阵为

$$C' A C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

三 求正交向量、标准正交基

根据正交的定义,求得所要求的正交向量,往往通过解线性方程组来完成.

由一组基出发求标准正交基,可以先正交化而后单位化,也可以边正交化边单位化.

例 4 在欧氏空间 R^4 (内积按通常定义) 中,求一个单位向量与 $\alpha_1=(2, 4, -2, 1)$, $\alpha_2=(0, 0, 0, 1)$, $\alpha_3=(2, 3, 4, 3)$ 都正交.

解 设向量 $\beta=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都正交, 则

$$\begin{cases} (\beta, \alpha_1) = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ (\beta, \alpha_2) = x_4 = 0 \\ (\beta, \alpha_3) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \end{cases}$$

解齐次线性方程组,取一非零解,得到一个向量 $\beta=(11, -6, -1, 0)$, 将 β 单位化:

$$\beta_0 = \frac{\beta}{|\beta|} = \left(\frac{11}{2\sqrt{43}}, -\frac{3}{\sqrt{43}}, -\frac{1}{2\sqrt{43}}, 0 \right),$$

则 β_0 就是所求的单位向量.

例 5 在欧氏空间 R^3 (内积按通常定义) 中,由基 $\alpha_1=(0, 1, 1)$, $\alpha_2=(1, 1, 0)$, $\alpha_3=(1, 0, 1)$ 出发,求一组标准正交基.

解 取 $\beta_1 = \alpha_1 = (0, 1, 1)$,

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \alpha_2 - \frac{1}{2} \beta_1 = \frac{1}{2}(2, 1, -1),$$

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = \alpha_3 - \frac{1}{2} \beta_1 - \frac{1}{3} \beta_2 \\ &= \frac{2}{3}(1, -1, 1), \end{aligned}$$

则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是一组正交基. 再将它们单位化,得到一组标准正交基

$$\eta_1 = \beta_1 / |\beta_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1),$$

$$\eta_2 = \beta_2 / |\beta_2| = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1),$$

$$\eta_3 = \beta_3 / |\beta_3| = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1).$$

四 求正交补、正射影

求正交补的方法有两个: 1) 求出 W 的一正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, $0 < m < n$, 扩充为 V 的正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$, 从而 $W^\perp = L(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$. 2) 求出 W 的一组基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$, $0 < t < n$, 且设 $(\beta_i) = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, 解齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, t, \quad \text{得一基础解系 } (\eta_1), (\eta_2), \dots,$$

(η_{n-t}) , 则 $W^\perp = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-t})$.

求 α 在 W 上的正射影的方法: 设 W 的一组基为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$,

则可求得方程组 $\sum_{j=1}^t (\alpha_i, \alpha_j) x_j = (\alpha_i, \alpha), i = 1, 2, \dots, t$ 的唯一解

(x_1, x_2, \dots, x_t) , 从而, α 在 W 上的正射影是 $\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_t \alpha_t$.

例 6 在欧氏空间 \mathbb{R}^3 (内积按通常定义) 中, 子空间 $W = L(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 = (1, 2, 0)$, $\alpha_2 = (2, -1, 0)$, 求 W^\perp .

解 因为 $(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, 所以 α_1, α_2 是 W 的一组正交基, 扩充为 \mathbb{R}^3 的一正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 其中 $\alpha_3 = (0, 0, 1)$, 则 $W^\perp = L(\alpha_3)$.

例 7 W 是欧氏空间 \mathbb{R}^4 (内积按通常定义) 的一个子空间, 且 W 是下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间, 求 W^\perp .

解 求得所给线性方程组的系数矩阵的秩为 2, 所以, $\dim W$

$=2$, 从而, 求得 W 的一组基 $\alpha_1 = (-6, 9, 1, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1, 0, 1)$. 设 $\beta = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 是 W^\perp 中的任意向量, 则有 $(\beta, \alpha_1) = (\beta, \alpha_2) = 0$, 解

$$\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0, \end{cases}$$

得一基础解系 $\beta_1 = (1, 0, 6, 0)$, $\beta_2 = (0, -1, 9, 1)$, 因此, $W^\perp = L(\beta_1, \beta_2)$.

例 8 欧氏空间 R^4 (内积按通常定义) 中, 子空间 W 的一组基为 $\alpha_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 1, 1)$, 试求 $\alpha = (1, 1, 1, 1)$ 在 W 上的正射影.

解 方程组
$$\begin{cases} (\alpha_1, \alpha_1)x_1 + (\alpha_1, \alpha_2)x_2 = (\alpha_1, \alpha) \\ (\alpha_2, \alpha_1)x_1 + (\alpha_2, \alpha_2)x_2 = (\alpha_2, \alpha) \end{cases}$$

即为
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = 3, \end{cases}$$

解得 $x_1 = \frac{3}{11}$, $x_2 = \frac{12}{11}$, 从而, α 在 W 上的正射影是

$$\beta = \frac{3}{11}\alpha_1 + \frac{12}{11}\alpha_2 = \left(\frac{3}{11}, \frac{9}{11}, \frac{15}{11}, \frac{9}{11}\right).$$

五 求矛盾方程组的最小二乘解

矛盾方程组 $AX = B$ 的最小二乘解, 即为 $A'AX = A'B$ 的解, 因为 $(A'A, A'B)$ 与 $A'A$ 的秩相等, 所以 $A'AX = A'B$ 总是有解.

例 9 求矛盾方程组
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$
 的最小二乘解.

解 由于 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$,

所以, $A'A = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $A'B = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$.

解方程组
$$\begin{cases} 14x_1 + 3x_2 = 20 \\ 3x_1 + 6x_2 = 5, \end{cases}$$

得到最小二乘解 $x_1 = 7/5$, $x_2 = 2/15$.

六 实对称矩阵的正交对角化

按照 § 2, V, 三, 中的三个步骤进行.

例10 已知 $A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$,

试求正交矩阵 T , 使 $T'AT = T^{-1}AT$ 为对角形.

解 1) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 17 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 14 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 14 \end{vmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 18)^2$,

从而, A 的特征值为 $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$.

2) 对于 $\lambda_1 = 9$, 解方程组

$$\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases}$$

得一基础解系 $(1, 2, 2)$, 单位化得 $\eta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

对于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$, 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$$

得一基础解系 $(-2, 1, 0)$, $(-2, 0, 1)$, 正交化并单位化得

$$\eta_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \eta_3 = \left(\frac{-2}{\sqrt{45}}, \frac{-4}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}\right).$$

3) 作 $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$,

则 $T'AT = T^{-1}AT = (9, 18, 18)$.

例11 用正交矩阵, 将 n 阶对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{化为对角矩阵.}$$

解 1)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-n-1)(\lambda-1)^{n-1},$$

从而, A 的特征值为 $\lambda_1 = n+1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 1$.

2) 对于 $\lambda_1 = n+1$, 解方程组 $((n+1)E - A)X = 0$, 得 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, 一基础解系为 $(1, 1, \cdots, 1)$, 单位化得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \cdots, 1).$$

对于 $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$, 解方程组 $(E - A)X = 0$, 得 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$, 一基础解系为 $(1, -1, 0, \cdots, 0)$, $(1, 1, -2, 0, \cdots, 0)$, \cdots , $(1, 1, \cdots, 1, 1-n)$, 它们两两正交, 再单位化, 得

$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, \cdots, 0),$$

$$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 2}}(1, 1, -2, 0, \cdots, 0),$$

.....

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{(1-n)^2 + (n-1)}}(1, 1, \cdots, 1, 1-n).$$

$$3) \text{ 作 } T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(1-n)^2+(n-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(1-n)^2+(n-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2^2+2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(1-n)^2+(n-1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1-n}{\sqrt{(1-n)^2+(n-1)}} \end{pmatrix},$$

则 $T'AT = T^{-1}AT = (n+1, 1, \cdots, 1)$.

七 实二次型的正交化简

设有实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = XAX'$, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 对 A 正交对角化, 求得 T , 作 $X = TY$, 则 f 化为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $T'AT$ 的主对角线上的元素. 若只要求写出标准形, 或者仅判断是否正定, 则不必求出 T , 而只求出 A 的特征值即可以.

例12 用正交线性替换化实二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 为标准形.

解 二次型 f 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 5)$. A 的特征值为: $2, -1, 5$. 相应的特征向量为: $(2, -1, -2), (2, 2, 1), (1, -2, -2)$. 这三个向量正交, 再单位化得:

$$\eta_1 = \frac{1}{3}(2, -1, -2), \eta_2 = \frac{1}{3}(2, 2, 1), \eta_3 = \frac{1}{3}(1, -2, -2).$$

从而有正交矩阵 $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

因此, f 经过正交线性替换 $X = TY$, 化为 $f = X'AX = Y'(T'AT)Y$

$2y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$. 其中 $X = (x_1, x_2, x_3)'$, Y 类似.

例13 判断实二次型 $f = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ 是否正定.

解 二次型 f 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

$|\lambda E - A| = (\lambda - 6)(\lambda^2 - 12\lambda + 27)$, 解得, A 的特征值: $6, 3, 9$. 因此, f 正定.

八 酉空间的计算题

利用类似于欧氏空间的方法去做.

例14 利用酉线性变换化厄米特二次型 $h = x_1 \overline{x_1} + 4x_2 \overline{x_2} + x_3 \overline{x_3} + 14ix_1 \overline{x_2} - 14i \overline{x_1} x_2 + 11x_1 \overline{x_3} + 11x_1 \overline{x_3} + 14ix_2 \overline{x_3} - 14i \overline{x_2} x_3$ 为标准形.

解 厄米特二次型 h 的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 14i & 11 \\ -14i & 4 & 14i \\ 11 & -14i & 1 \end{pmatrix},$$

$|\lambda E - A| = (\lambda - 12)(\lambda - 18)(\lambda + 24)$, 所以, A 的特征值是: $12, 18, -24$, 相应的特征向量分别是: $(1, 0, 1)$, $(-1, 2i, 1)$, $(1, i, -1)$, 它们两两正交, 再单位化, 得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2i, 1), \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, i, -1).$$

作酉矩阵
$$U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2i & \sqrt{2}i \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

则在 $X = UY$ 之下, h 有标准形 $12y_1 \overline{y_1} + 18y_2 \overline{y_2} - 24y_3 \overline{y_3}$.

I 证明题

一 欧氏空间、子空间

根据欧氏空间的定义验证是否作成欧氏空间。

证明子空间的维数时，一般取正交基，并考虑子空间之间的正交关系。

例1 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 n 阶正定矩阵，而 $\alpha=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\beta=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ，在 \mathbb{R}^n 中定义 $(\alpha, \beta)=\alpha A \beta'$ ，证明这是 \mathbb{R}^n 的一个内积，从而 \mathbb{R}^n 在该内积下作成一个欧氏空间。

证明 1) 由于 $\alpha A \beta'$ 为一阶矩阵，所以 $(\alpha A \beta')' = \alpha A \beta'$ ，即， $\alpha A \beta' = \beta A' \alpha' = \beta A \alpha'$ ，因此， $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ 。2) 对任意 $k \in \mathbb{R}$ ， $(k\alpha, \beta) = (k\alpha) A \beta' = k(\alpha A \beta') = k(\alpha, \beta)$ 。3) 对任意 $\gamma = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ ， $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha + \beta) A \gamma' = \alpha A \gamma' + \beta A \gamma' = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$ 。4) 由正定二次型的知识，因为 A 为正定矩阵，所以，当 $\alpha \neq 0$ 时， $\alpha A \alpha' > 0$ 。因此所定义的 (α, β) 满足内积的条件，从而 \mathbb{R}^n 作成一个欧氏空间。

例2 设 W 是 $n(n > 0)$ 维欧氏空间 V 的 m 维子空间， $M = \{x \mid x \in V \text{ 且 } x \perp W\}$ ，证明 M 是 V 的 $n-m$ 维子空间。

证明 易证， M 作成 V 的子空间，从略。当 $m=0$ 时， $M=V$ ；当 $m=n$ 时， $M=\{0\}$ ，结论均成立。当 $0 < m < n$ 时，取 W 的一正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ，扩充为 V 的一正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$ ，由于 $\alpha_j \perp \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ，所以， $\alpha_j \perp W, j=m+1, \dots, n$ ，从而 M 的维数 $\geq n-m$ 。对任意 $x \in M$ ， $x = k_1 \alpha_1 + \dots + k_m \alpha_m + k_{m+1} \alpha_{m+1} + \dots + k_n \alpha_n$ ， $(x, \alpha_i) = k_i (\alpha_i, \alpha_i)$ ，从而 $k_i = 0, i=1, 2, \dots, m$ ， $x = k_{m+1} \alpha_{m+1} + \dots + k_n \alpha_n$ ，所以 M 的维数 $\leq n-m$ 。因此， M 是 V 的 $n-m$ 维子空间。

二 向量正交、标准正交基

证明向量正交，按照定义计算内积，得到内积为零的结果，即可以。

证明标准正交基，可以按照定义，也可以借助于过渡矩阵，进行证明。

例 3 设 A 是 n 阶反对称矩阵, $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 维欧氏空间 R^n (内积按通常定义) 的任一向量, $\beta = \alpha A$, 证明 α 与 β 正交.

证明 因为, $(\alpha, \beta) = \alpha \beta' = \alpha (\alpha A)' = \alpha (-A \alpha') = -\alpha A \alpha'$, $(\beta, \alpha) = \beta \alpha' = \alpha A \alpha'$, 所以 $(\alpha, \beta) = -(\beta, \alpha) = -(\alpha, \beta)$. 因此, $(\alpha, \beta) = 0$, α 与 β 正交.

例 4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 n ($n > 0$) 维欧氏空间 V 的一组基. 证明: 这组基是标准正交基的必要充分条件是, 对 V 中任意向量 α , 都有 $\alpha = (\alpha, \alpha_1)\alpha_1 + (\alpha, \alpha_2)\alpha_2 + \dots + (\alpha, \alpha_n)\alpha_n$.

证明 先证明必要性. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为标准正交基, 而 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$, 则 $(\alpha, \alpha_i) = (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n, \alpha_i) = k_i(\alpha_i, \alpha_i) = k_i$. 因此, $\alpha = (\alpha, \alpha_1)\alpha_1 + (\alpha, \alpha_2)\alpha_2 + \dots + (\alpha, \alpha_n)\alpha_n$.

再证明充分性. 设对于 V 中任意向量 α 均有 $\alpha = (\alpha, \alpha_1)\alpha_1 + (\alpha, \alpha_2)\alpha_2 + \dots + (\alpha, \alpha_n)\alpha_n$, 则由于 $\alpha_i = 0\alpha_1 + \dots + 1\alpha_i + \dots + 0\alpha_n$, 得到 $(\alpha_i, \alpha_i) = 1$ 而 $i \neq j$ 时 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$. 因此, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为标准正交基.

三 正交变换

关于正交变换的证明, 首先要考虑运用正交变换的定义及等价条件; 其次, 在有限维欧氏空间的情况下, 要注意正交变换与正交矩阵的相互转化.

例 5 设 σ_1, σ_2 是 n 维欧氏空间 V 的两个线性变换, 且对于任意 $\alpha \in V$, 有 $|\sigma_1(\alpha)| = |\sigma_2(\alpha)|$, 证明: 存在 V 的正交变换 σ 与 σ' , 使 $\sigma\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma'\sigma_2 = \sigma_1$.

证明 只证明 $\sigma\sigma_1 = \sigma_2$, 另一个类似.

设 $V_1 = \sigma_1(V)$, $V_2 = \sigma_2(V)$, 并且, 设

$\phi: V_1 \rightarrow V_2$, $\phi(\sigma_1(\alpha)) = \sigma_2(\alpha)$, $\forall \alpha \in V$.

易证 ϕ 是 V_1 到 V_2 的同构映射, 从略.

由于 V 是 n 维的, 所以, 有 $V = V_1 \oplus V_1^\perp = V_2 \oplus V_2^\perp$. 由于 V_1 与 V_2 同构, 从而维数相同, 所以 V_1^\perp 与 V_2^\perp 的维数相同, 从而 V_1^\perp 与 V_2^\perp 同构. 设 ψ 是 V_1^\perp 到 V_2^\perp 的一个同构映射.

设 $\sigma: V \rightarrow V, \forall \alpha \in V, \alpha = \alpha_1 + \alpha_1', \alpha_1 \in V_1,$

$$\alpha_1' \in V_1^\perp, \sigma(\alpha) = \phi(\alpha_1) + \psi(\alpha_1'),$$

则易证 σ 是 V 的一个正交变换, 从略. 且对于任意 $\alpha \in V$, 由于 $\sigma_1(\alpha) \in \sigma_1(V) = V_1$, 而 $\sigma_1(\alpha) = \sigma_1(\alpha) + 0$, 所以, $(\sigma\sigma_1)(\alpha) = \sigma(\sigma_1(\alpha)) = \phi(\sigma_1(\alpha)) + \psi(0) = \phi(\sigma_1(\alpha)) = \sigma_2(\alpha)$. 因此 $\sigma\sigma_1 = \sigma_2$.

例 6 证明: 第二类正交变换一定有特征值 -1 .

证明 设 σ 是 $n(n > 0)$ 维欧氏空间 V 的一个第二类正交变换, A 是 σ 在 V 的某一组标准正交基下的矩阵, 则 $|A| = -1$.

设 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$, 则 $f(-1) = |(-1)E - A| = |-E - A| = (-1)^n |E + A|$. 但是, 由于 $A'A = E$, 所以 $(-1)^n |E + A| = (-1)^n |A'A + A| = (-1)^n |A' + E| |A| = (-1)^{n+1} |A + E|$, 因此 $|E + A| = 0, f(-1) = 0$, 即 -1 为 σ 的特征值.

四 正交补

关于正交补的证明题, 一般给出有限维欧氏空间的条件, 此时, 要注意 W 的正交补 W^\perp 的构造, W^\perp 恰由所有与 W 正交的向量组成.

例 7 设 W_1, W_2 是 $n(n > 0)$ 维欧氏空间 V 的两个子空间, 且 $W_1 \subseteq W_2$, 证明 $W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$.

证明 对于任意 $x \in W_2^\perp$, 有 $x \perp W_2$, 由于 $W_1 \subseteq W_2$, 所以 $x \perp W_1$. 因此, $x \in W_1^\perp, W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$.

例 8 设 σ 是 $n(n > 0)$ 维欧氏空间 V 的正交变换, W 是 σ 的不变子空间, 证明 W^\perp 也是 σ 的不变子空间.

证明 由于 W 是 σ 的不变子空间, 所以, σ 限制于 W 上, σ 也是 W 的变换, 且是 W 的正交变换. 由于 σ 是单射, 又 W 为有限维

的, 所以 σ 是满射, 从而, 对于任意 $x \in W$, 有 $y \in W$, 使 $\sigma(y) = x$. 任取 $\alpha \in W^\perp$, 则 $(\alpha, y) = 0$, 从而, $(\sigma(\alpha), x) = (\sigma(\alpha), \sigma(y)) = (\alpha, y) = 0, \sigma(\alpha) \in W^\perp$. 因此, W^\perp 也是 σ 的不变子空间.

五 对称变换、实对称矩阵

关于对称变换与实对称矩阵的证明题, 可以各自独立地进行证明, 但是, 要注意二者之间的对应关系, 在很多情况下, 要经过互相转换才便于证明.

例 9 设 $\{A_k\}$ 是一组两两可交换的 n 阶实对称矩阵, 证明: 存在 n 阶正交矩阵 Q , 使得 $Q' A_k Q (k=1, 2, \dots)$ 都是对角形矩阵.

证明 对矩阵的阶数 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, 显然成立. 设 $n-1$ 时成立, 考虑 n 的情况.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 n 维欧氏空间 V 的一组标准正交基, 在该基下 A_k 对应的对称变换为 σ_k , 则由 $A_i A_j = A_j A_i$, 得 $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, 从而易证得 $\{\sigma_k\}$ 有公共特征向量 β_1 , 且 $|\beta_1| = 1$, 将 β_1 扩充为 V 的一组标准正交基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 于是, σ_k 在 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & B_k \end{pmatrix}, k=1, 2, \dots.$$

由 σ_k 为对称变换知, B_k 为实对称矩阵. 由 $\{A_k\}$ 两两可交换知, $\{B_k\}$ 也两两可交换. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 G^{-1} , 则 G 为正交矩阵, 且

$$A_k = G' \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & B_k \end{pmatrix} G.$$

由归纳假设, 对于 $\{B_k\}$, 存在正交矩阵 P , 使 $P' B_k P = C_k (k=1, 2, \dots)$ 均为对角形矩阵, 从而 $A_k = G' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & C_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}' G$.

设 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}' G$, 则 Q 是正交矩阵. 于是 $A_k = Q' \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & C_k \end{pmatrix} Q$, 或 $(Q')^{-1} A_k Q^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & C_k \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = Q'$, 记 $T = Q'$, 则 $T' A_k T$

$= \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & C_k \end{pmatrix}$, 即 $T' A_k T$ 均为对角形矩阵 ($k=1, 2, \dots$). n 的情况

成立. 根据数学归纳法原理, 结论成立.

例10 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵, 且 A 为正定矩阵, 证明: 存在 n 阶实可逆矩阵 T , 使 $T' A T, T' B T$ 同时为对角形矩阵.

证明 由于 A 为 n 阶正定矩阵, 所以有 n 阶实可逆矩阵 P , 使 $P' A P = E$. 对于实对称矩阵 $P' B P$, 存在正交矩阵 Q , 使 $Q' (P' B P) Q$ 为对角形矩阵. 记 $T = PQ$, 则 T 为实可逆矩阵, 且 $T' A T = Q' (P' A P) Q = Q' E Q = E$, $T' B T = Q' (P' B P) Q$ 均为对角形矩阵.

六 酉空间

关于酉空间的证明题, 可以仿照欧氏空间中的对应情况去处理.

例11 证明酉矩阵的特征值的模为 1.

证明 设 A 为 n 阶酉矩阵. 取 n 维酉空间 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 则 A 在该基下与线性变换 σ 对应, σ 为酉变换. 设 λ_0 为 A 的一特征值, 则 λ_0 为 σ 的一特征值. 设 α 是 V 中属于 λ_0 的 σ 的特征向量, 即 $\sigma(\alpha) = \lambda_0 \alpha$, 从而 $(\sigma(\alpha), \sigma(\alpha)) = (\lambda_0 \alpha, \lambda_0 \alpha) = \lambda_0 \overline{\lambda_0} (\alpha, \alpha)$, $(\sigma(\alpha), \sigma(\alpha)) = (\alpha, \alpha)$, $\lambda_0 \overline{\lambda_0} (\alpha, \alpha) = (\alpha, \alpha)$, 由 $\alpha \neq 0$ 得 $(\alpha, \alpha) > 0$, 从而 $\lambda_0 \overline{\lambda_0} = 1$, 即 λ_0 的模为 1.

例12 设 σ 是酉空间 V 的厄米特变换, λ_0, μ_0 是 σ 的两个不同的特征值, α, β 分别为属于 λ_0, μ_0 的特征向量, 证明 α 与 β 正交.

证明 $(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma(\beta))$. $(\sigma(\alpha), \beta) = (\lambda_0 \alpha, \beta) = \lambda_0 (\alpha, \beta)$, $(\alpha, \sigma(\beta)) = (\alpha, \mu_0 \beta) = \overline{\mu_0} (\alpha, \beta)$. 由于厄米特变换的特征值均为实数, 所以 $\lambda_0 (\alpha, \beta) = \mu_0 (\alpha, \beta)$, 再由 $\lambda_0 \neq \mu_0$ 得, $(\alpha, \beta) = 0$, 即 α, β 正交.

§5 补充资料

I 格兰姆矩阵、广义阿达马不等式

设 V 是欧氏空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 V 中任意 s 个向量, 称 s 阶矩阵

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_s) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_s, \alpha_1) & (\alpha_s, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_s, \alpha_s) \end{pmatrix}$$

为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的格兰姆矩阵, 称 $|G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)|$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的格兰姆行列式.

设 V 是欧氏空间, 则 V 中任意 s 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的格兰姆矩阵 $G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 必是半正定的. 而 $G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 是正定的必要充分条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

欧氏空间 V 中任意 s 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的格兰姆矩阵的任何顺序主子式都是非负数, 当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关时 $|G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)| > 0$.

当对 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 施行施密特正交化 (不单位化) 过程时 $|G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)|$ 的值不变. 即, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 经过正交化过程后化为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, 则 $|G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)| = |G(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)| = (\beta_1, \beta_1)(\beta_2, \beta_2) \cdots (\beta_s, \beta_s)$.

在三维几何空间中, $|G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)|$ 的几何解释: 1) 当 $s=2$ 时, $|G(\alpha_1, \alpha_2)| = \begin{vmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) \end{vmatrix} = (\alpha_1, \alpha_1) \cdot (\alpha_2, \alpha_2) - (\alpha_1, \alpha_2)^2 = |\alpha_1|^2 |\alpha_2|^2 - |\alpha_1|^2 |\alpha_2|^2 \cos^2 \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = |\alpha_1|^2 |\alpha_2|^2 \sin^2 \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = |\alpha_1 \times \alpha_2|^2$, 从而, $|G(\alpha_1, \alpha_2)|$ 是以向量 α_1, α_2 为邻边的平行四边形面积的平方; 2) 当 $s=3$ 时, $|G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)|$ 的绝对值是以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为邻边的平行六面

体的体积的平方。

广义阿达马不等式。对欧氏空间 V 中任意 s 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 必有 $|G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)| \leq \prod_{i=1}^s (\alpha_i, \alpha_i)$, 而等号成立的必要充分条件是 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, s$.

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 是 n 阶实矩阵, 则 $|A|^2 = |A' A| = |G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)| \leq \prod_{i=1}^n \alpha_i' \alpha_i = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)$. 这就是通常的阿达马不等式。

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是欧氏空间 V 中的任意 s 个向量, 则对任何正整数 k, s 阶矩阵

$$A(k) = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1)^k & (\alpha_1, \alpha_2)^k & \dots & (\alpha_1, \alpha_s)^k \\ (\alpha_2, \alpha_1)^k & (\alpha_2, \alpha_2)^k & \dots & (\alpha_2, \alpha_s)^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_s, \alpha_1)^k & (\alpha_s, \alpha_2)^k & \dots & (\alpha_s, \alpha_s)^k \end{pmatrix}$$

必是半正定的。当 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关时, $A(k)$ 必是正定的。

II 共轭变换、正规变换

设 σ 是 n 维酉空间 V 的一个线性变换。若有 V 的线性变换 τ , 使得对任意 $\alpha, \beta \in V$, 有 $(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \tau(\beta))$, 则称 τ 是 σ 的一个共轭变换。

若 σ 有共轭变换, 则唯一, 记为 σ^* 。

设 σ 是 n 维酉空间 V 的线性变换, σ^* 存在。若 σ 在 V 的标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 A , 则 σ^* 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 $\overline{A'}$ 。反之亦然。

共轭变换有如下关系式: 1) $T e^* = T e$; 2) $(\sigma^*)^* = \sigma$; 3) $(\lambda \sigma)^* = \overline{\lambda} \sigma^*$; 4) $(\sigma + \tau)^* = \sigma^* + \tau^*$; 5) $(\sigma \tau)^* = \tau^* \sigma^*$ 。

设 σ 是 n 维酉空间 V 的线性变换, σ^* 存在。若 $\sigma \sigma^* = \sigma^* \sigma$, 则称 σ 是一个正规变换。

设 σ 是酉空间 V 的一个正规变换, 而 λ_0 是 σ 的一个特征值, α

是属于 λ_0 的特征向量, 则 α 是 σ^* 的属于特征值 $\overline{\lambda_0}$ 的特征向量.

设 σ 是酉空间 V 的一个正规变换, 则 σ 的属于不同特征值的特征向量必正交.

设 σ 是 n 维酉空间 V 的一个正规变换, 则在 V 中存在一组标准正交基, 使 σ 在该组基下的矩阵是对角形矩阵.

II 一般变换的分解

一 分解为对称与反对称部分的分解式

酉空间的每一个线性变换 σ 都可以表示为 $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ 的形状, σ_1, σ_2 为对称变换, 且表法是唯一的.

实际上, $\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma + \sigma^*), \sigma_2 = \frac{1}{2i}(\sigma - \sigma^*)$.

二 极式分解

酉空间 V 的每一个线性变换 σ 均有极分解式 $\sigma = \sigma_1\sigma_2$, 其中 σ_1 是非负对称变换, σ_2 是酉变换. σ_1 是唯一确定的; 若 σ 是满秩的, 则 σ_2 也是唯一确定的.

三 凯莱变换

若 σ 为酉空间 V 的对称变换, 则变换 $\sigma \pm iT_e$ 有逆变换存在, 由式 $\tau = (\sigma - iT_e)(\sigma + iT_e)^{-1}$ 所定出的变换 τ 为一酉变换, 它没有等于1的特征值, 且 σ 可以经过 τ 表示为 $\sigma = -i(\tau + Te)(\tau - Te)^{-1}$. 反之, 若 τ 为一酉变换, 没有等于1的特征值, 则 $\tau - Te$ 有逆变换存在, 由 $\sigma = -i(\tau + Te)(\tau - Te)^{-1}$ 所确定的 σ 是对称变换, 且 τ 可经 σ 表为 $\tau = (\sigma - iT_e)(\sigma + iT_e)^{-1}$.

反对称变换时, 有:

$$\tau = (\sigma - Te)(\sigma + Te)^{-1}, \sigma = -(\tau + Te)(\tau - Te)^{-1}.$$

四 影谱分解

设 σ 是酉空间 V 的线性变换. 若 $\sigma = \alpha_1\tau_1 + \alpha_2\tau_2 + \cdots + \alpha_s\tau_s$, 并且: 1) 数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 互不相等; 2) $\tau_j^* = \tau_j \neq T_0, j=1, 2, \cdots, s$; 3) $\tau_j^2 = \tau_j, j=1, 2, \cdots, s$; 4) $\tau_j\tau_k = T_0, j, k=1,$

2, ..., s, $j \neq k$; 5) $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_s = Te$; 则称该式是 σ 的影谱分解.

酉空间 V 的线性变换 σ 有影谱分解式 $\Leftrightarrow \sigma$ 是正规变换.

若 $\sigma = \alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2 + \dots + \alpha_s \tau_s$ 为 σ 的影谱分解式, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为 σ 的所有特征值.

酉空间的每一正规变换有且仅有一个影谱分解式.

IV 历史资料点滴

关于柯西-布涅柯夫斯基不等式: 1821年, 对于 R^n , 柯西证明了在一般情形的这一不等式; 1859年, 俄国数学家布涅柯夫斯基证明并系统地应用了这一不等式; 1885年, 施瓦兹才首次遇到这个不等式.

凯莱于1843年通过与普通解析几何作形式的类比的途径, 介绍了 n 维空间的概念. 德国著名数学家格拉斯曼 (1809, 4, 15—1877, 9, 26) 在1844年发表《线性扩张论》一书, 引入欧几里得多维空间的概念, 把点、直线、平面、两点之间的距离等概念推广到任意的 R^n . 1862年格拉斯曼发表了修订版, 称为《扩张论》, 详细地叙述了他原来的工作, 是以严格的欧几里得式写出的, 建立了一种 n 维空间的几何学. 1844年、1845年和1847年, 格拉斯曼、柯西等数学家分别提出了脱离一切空间直观的、成为一个纯粹数学概念的 n 维空间的概念. 格拉斯曼首次提出了关于多维欧几里得空间理论的系统学说, 引入了向量的数量积.

1801—1802年间, 法国数学家阿歇特 (1769—1834)、蒙日 (1746—1818)、泊松 (1781—1840) 证明了三个变数的实二次型的特征值的实性. 1829年柯西在他的《数学练习》中证明了, 任意 n 阶实对称矩阵都有实特征值, 1834年雅可比重复了这一结果, 但是, 他们都排除了相等特征值的情况.

1855年, 法国数学家厄米特 (1822—1901) 证明了, 若 M 是 n 阶复矩阵, 且 $M = M^*$, 则其特征值都是实数, 这里 M^* 是将 M

的每个元素用它的共轭复数代替后，再转置得到的矩阵，而 M 称为厄米特矩阵。后来，德国数学家克雷卜什（1833—1872）由厄米特的结果导出，实反对称矩阵的非零特征值是纯虚数；布克海姆（1859—1888）证明了，若 M 是对称的，且元素是实数，则特征值是实数。

虽然，早在1854年，厄米特就使用了正交矩阵这个术语；但是，直到1878年，弗罗宾纽斯才发表正交矩阵的正式定义： n 阶实矩阵 M 是正交的，若它等于它的转置矩阵的逆，即， $M = (M')^{-1}$ ，他还证明了 $(A^{-1})' = (A')^{-1}$ ，并研究了合同矩阵。

1805年，法国数学家勒让德（1752，9，18—1833，1，10）在他的著作《确定彗星轨道的新方法》中，发表了最小二乘法，称之为“最小平方数法”，最先将这个方法提炼成形，给出了一个使用这个方法的例子，对这个方法作了一个清楚的解释，引起数学界的注目。1808年底或1809年初，美国数学家亚居伦也发表了这一方法。然而，实际上，高斯早在1795年就发现了最小二乘法，但直到1809年才在其《天体运动理论》中发表。拉普拉斯在他的《概率的分析理论》中提出了最小二乘法的第一个证明。

§6 基本习题

1 在欧氏空间 \mathbf{R}^4 （内积按通常定义）中，已知 $\alpha = (1, 2, -1, 1)$ ， $\beta = (2, 3, 1, -1)$ ， $\gamma = (-1, -1, -2, 2)$ ，试求 α ， β ， γ 的长度，每两个向量的内积与夹角。

2 在欧氏空间 \mathbf{R}^4 （内积按通常定义）中，求一单位向量，使它同时与向量 $\alpha_1 = (1, 1, -1, 1)$ ， $\alpha_2 = (1, -1, -1, 1)$ ， $\alpha_3 = (2, 1, 1, 3)$ 中的每一个都正交。

3 在 $\mathbf{R}[x]_4$ 中定义内积为 $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ ，试由基 $1, x, x^2, x^3$ 出发作正交化，求 $\mathbf{R}[x]_4$ 的一组标准正交基。

4 对于实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$,

试求正交矩阵 T , 使 $T'AT = T^{-1}AT$ 为对角形矩阵.

5 试判断实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3$ 是否正定.

6 设 W 是欧氏空间 V 的子空间, 且 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$. 若 $\alpha \perp \alpha_i, i=1, 2, \dots, s$, 证明 $\alpha \perp W$.

7 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是欧氏空间 V 的一组基, 任意 $\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n, \beta = y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n$, 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一组标准正交基 $\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.

8 设 A 是实对称矩阵, S 是实反对称矩阵, 且 $AS = SA, A - S$ 可逆, 证明: $G = (A + S)(A - S)^{-1}$ 是正交矩阵.

9 设 σ 是 $n(n > 0)$ 维欧氏空间 V 的对称变换, 且 $\sigma^2 = \sigma$, 证明: 存在 V 的一组标准正交基, 使 σ 在该组基下的矩阵是 $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

10 证明酉空间的两组标准正交基之间的过渡矩阵是酉矩阵.

第十章 双线性函数

§1 概括说明

作为二次型、欧氏空间(酉空间)的内积的发展,就导致一般的双线性函数的概念.双线性函数的进一步发展,则是三重线性型及更一般的多重线性型,总括起来,成为线性代数学的一个重要部分,称为型论.在数学、物理学、工程科学等的许多领域中,型论具有重要意义.

借助于双线性函数,就能定义一般的双线性度量空间,从而引进多种空间,如伪欧氏空间等,作为欧氏空间(酉空间)的进一步的发展.同样地,在数学、物理学、工程科学的许多领域中,这些空间具有重要意义,例如,四维伪欧氏空间(物理学称之为闵可夫斯基空间)是狭义相对论所必须的.

本章的内容分为六个部分:线性函数,对偶空间,双线性函数,对称双线性函数,反对称双线性函数,伪欧氏空间.

数域 F 上的线性空间 V 的线性函数,是本章中的重要概念.

数域 F 上的线性空间 V 的所有线性函数作成 F 上的线性空间 $L(F, V)$,称为 V 的对偶空间.

双线性函数是本章中的又一个重要概念.

对称双线性函数是一类重要的双线性函数.

反对称双线性函数是另一类重要的双线性函数.

利用双线性函数引进双线性度量空间及伪欧氏空间.

本章的补充资料是:复欧氏空间,辛空间,多重线性代数,历史资料点滴.

§2 内容提要

I 线性函数

设 V 是数域 F 上的一个线性空间, f 是 V 到 F 的一个映射. 若对于任意 $\alpha, \beta \in V$ 及任意 $k \in F$, 均成立: 1) $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$, 2) $f(k\alpha) = kf(\alpha)$, 则称 f 是 V 上的一个线性函数.

设 f 是线性空间 V 上的一个线性函数. 若对于任意 $\alpha \in V$, 均有 $f(\alpha) = 0$, 则称 f 是零函数.

线性函数具有下列简单性质: 1) $f(0) = 0$, $f(-\alpha) = -f(\alpha)$; 2) 若 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$, 则 $f(\beta) = k_1f(\alpha_1) + k_2f(\alpha_2) + \cdots + k_sf(\alpha_s)$.

设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 F 中确定的数, 则 $f(X) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ 是 F^n 上的一个线性函数.

设 V 是数域 F 上的一个 n 维线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, a_1, a_2, \cdots, a_n 是 F 中任意 n 个数, 则存在唯一的 V 上的线性函数 f , 使得 $f(\varepsilon_i) = a_i, i = 1, 2, \cdots, n$.

II 对偶空间

V 是数域 F 上的 n 维线性空间, V 上全体线性函数组成的集合记作 $L(V, F)$. 对于 $f, g \in L(V, F)$ 及 $k \in F$, 由 $(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) (\alpha \in V)$ 所定义的 $f+g$ 是 V 上的线性函数, 称为 f 与 g 的和; 由 $(kf)(\alpha) = k(f(\alpha)) (\alpha \in V)$ 所定义的 kf 是 V 上的线性函数, 称为 k 与 f 的数量乘积. $L(V, F)$ 对于如此定义加法和数量乘法作成 F 上的线性空间, 称为 V 的对偶空间, 也简单地记作 V^* .

取定 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, 作 V 上的 n 个线性函数 f_1, f_2, \cdots, f_n , 使得

$$f_i(\varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & j=i; \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

则对于任意的 $\alpha \in V$, 有 $\alpha = \sum_{i=1}^n f_i(\alpha) \varepsilon_i$; 而对于任意的 $f \in V^*$,

有 $f = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) f_i$. 并且, f_1, f_2, \dots, f_n 作成 V^* 的一组基,

从而, V^* 是 n 维的, 上面的 V^* 的基 f_1, f_2, \dots, f_n 称为 V 的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的对偶基.

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 及 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是线性空间 V 的两组基, 而 f_1, f_2, \dots, f_n 及 g_1, g_2, \dots, g_n 分别是它们的对偶基. 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的过渡矩阵是 A , 则 f_1, f_2, \dots, f_n 到 g_1, g_2, \dots, g_n 的过渡矩阵是 $(A')^{-1}$.

V 是一个有限维线性空间, V^{**} 是 V 的对偶空间 V^* 的对偶空间. 取定 $x \in V$, 定义 V^* 的一个函数 x^{**} 为: $x^{**}(f) = f(x)$ ($f \in V^*$), 则 V 到 V^{**} 的映射 $x \rightarrow x^{**}$ 是一个同构映射.

于是, 线性空间 V 也可看成 V^* 的线性函数空间, 实际上, V 与 V^* 是互为线性函数空间的, 对偶空间的名称如此而来. 由此, 任一 n 维线性空间都可以看成某个线性空间的线性函数所成的空间, 这一看法在多重线性代数中是很重要的.

II 双线性函数

V 是数域 F 上的线性空间, $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的一个二元函数, 即, 对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 根据法则 f 都唯一地对应 F 中的一数 $f(\alpha, \beta)$. 若对于任意 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta \in V$, 任意 $k_1, k_2 \in F$, 均成立:

$$1) f(\alpha, k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2) = k_1 f(\alpha, \beta_1) + k_2 f(\alpha, \beta_2);$$

$$2) f(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2, \beta) = k_1 f(\alpha_1, \beta) + k_2 f(\alpha_2, \beta),$$

则称 $f(\alpha, \beta)$ 为 V 上的一个双线性函数.

设 F^n 是数域 F 上 n 维列向量构成的线性空间, A 是 F 上的一个 n 阶矩阵. 对于 $X, Y \in F^n$, 定义 $f(X, Y) = X' A Y$, 则 $f(X, Y)$ 是 F 上的一个双线性函数.

设 V 是数域 \mathbf{F} 上的 n 维线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的一个双线性函数, 则称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1, \varepsilon_1) & f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ f(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & f(\varepsilon_2, \varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(\varepsilon_n, \varepsilon_1) & f(\varepsilon_n, \varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_n, \varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

为 $f(\alpha, \beta)$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的度量矩阵.

在给定的基下, V 上全体双线性函数与 \mathbf{F} 上全体 n 阶矩阵之间有一个双射, 并且保持加法与数量乘法.

同一个双线性函数在不同基下的度量矩阵是合同的.

设 $f(\alpha, \beta)$ 是线性空间 V 上的一个双线性函数. 若由 $f(\alpha, \beta) = 0$ 对任意 $\beta \in V$ 成立可推出 $\alpha = 0$, 则称 f 是非退化的. 双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 非退化当且仅当其度量矩阵 A 是非退化矩阵.

IV 对称双线性函数

设 $f(\alpha, \beta)$ 是线性空间 V 上的一个双线性函数. 若对于任意的 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$, 则称 $f(\alpha, \beta)$ 为对称双线性函数.

双线性函数是对称的, 当且仅当它在任一组基下的度量矩阵是对称的.

设 V 是数域 \mathbf{F} 上的 $n(>0)$ 维线性空间, $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的对称双线性函数, 则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 使 $f(\alpha, \beta)$ 在这组基下的矩阵为对角矩阵. 从而, 对于 V 中任意向量 $\alpha = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \cdots + x_n \varepsilon_n$, $\beta = y_1 \varepsilon_1 + y_2 \varepsilon_2 + \cdots + y_n \varepsilon_n$, 有 $f(\alpha, \beta) = d_1 x_1 y_1 + d_2 x_2 y_2 + \cdots + d_n x_n y_n$, 其中 $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbf{F}$.

设 V 是复数域 \mathbf{C} 上的 $n(>0)$ 维线性空间, $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的对称双线性函数, 则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 对于 V 中任意向量 $\alpha = x_1 \varepsilon_1 + \cdots + x_n \varepsilon_n$, $\beta = y_1 \varepsilon_1 + \cdots + y_n \varepsilon_n$, 有 $f(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + \cdots + x_r y_r$ ($0 \leq r \leq n$).

设 V 是实数域 \mathbb{R} 上的 $n(>0)$ 维线性空间, $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的对称双线性函数, 则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 对于 V 中任意向量 $\alpha = x_1 \varepsilon_1 + \dots + x_n \varepsilon_n$, $\beta = y_1 \varepsilon_1 + \dots + y_n \varepsilon_n$, 有 $f(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_r y_r$ ($0 \leq p \leq r \leq n$).

若 V 上的对称双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 是非退化的, 则有 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 满足

$$\begin{cases} f(\varepsilon_i, \varepsilon_i) \neq 0, & i=1, 2, \dots, n; \\ f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, & i \neq j. \end{cases}$$

这样的基称为 V 的对于 $f(\alpha, \beta)$ 的正交基.

设 V 是数域 F 上的线性空间, $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的双线性函数. 当 $\alpha = \beta$ 时, V 上的函数 $f(\alpha, \alpha)$ 称为与 $f(\alpha, \beta)$ 对应的二次齐次函数.

若两个双线性函数的度量矩阵分别为 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 及 $B = (b_{ij})$, 则, 只要 $a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} + b_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 它们所对应的二次齐次函数就相同, 从而, 可以多个双线性函数对应于同一个二次齐次函数. 但是, 当双线性函数是对称的时, 一个二次齐次函数恰对应一个对称双线性函数.

V 反对称双线性函数

设 $f(\alpha, \beta)$ 是线性空间 V 上的一个双线性函数. 若对于任意的 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$, 则称 $f(\alpha, \beta)$ 为反对称双线性函数.

双线性函数是反对称的, 当且仅当它在任一组基下的度量矩阵是反对称的.

设 $f(\alpha, \beta)$ 是 $n(>0)$ 维线性空间 V 上的反对称双线性函数, 则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{-r}, \eta_1, \dots, \eta_s$, 使得

$$\begin{cases} f(\varepsilon_i, \varepsilon_{-i}) = 1, & i=1, \dots, r; \\ f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, & i+j \neq 0; \\ f(\alpha, \eta_k) = 0, & \alpha \in V, k=1, \dots, s. \end{cases}$$

若 V 上的反对称双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 是非退化的, 则有 V 的一

组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{-r}$, 使得

$$\begin{cases} f(\varepsilon_i, \varepsilon_{-i}) = 1, & i = 1, 2, \dots, r, \\ f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0; & i + j \neq 0. \end{cases}$$

从而, V 的维数一定是偶数.

VI 伪欧氏空间

一 双线性度量空间

设 V 是数域 F 上的一个线性空间, 在 V 上定义了一个非退化的双线性函数, 则称 V 为一个双线性度量空间.

在讨论双线性度量空间的度量性质时, 一般的“长度”、“夹角”等概念很难推广进去, 但是, “正交性”、“正交基”、保持该双线性函数的线性变换等问题, 还是可以研究的.

二 伪欧氏空间

设 V 为实数域 R 上的一个 n 维线性空间, 在 V 上定义了一个非退化对称双线性函数 $f(\alpha, \beta)$, 则称 V 为一个伪欧氏空间, 或准欧氏空间.

在 V 中可以找到一组基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, 使 $f(\alpha, \beta)$ 在该组基下的矩阵为 $G = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$, 其中有 p 个 1, $n-p$ 个 -1, 称 $2p-n$ 为该伪欧氏空间 V 的符号差, 称 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 为 V 的一组规范基. 在规范基下, 二次齐次函数 $f(\alpha, \alpha)$ 成规范形.

设 σ 是 n 维伪欧氏空 V 的一个线性变换. 若对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$, 则称 σ 是一个正交变换.

n 维伪欧氏空间 V 的线性变换 σ 是一个正交变换 $\Leftrightarrow \sigma$ 在 V 的一组规范基下的矩阵 A 满足关系式 $A'GA = G$, 其中 G 为该规范基的度量矩阵.

设 $O_n(V)$ 是 n 维伪欧氏空间 V 的全体正交变换的集合, 则 $O_n(V)$ 具有如下性质: 1) $Te \in O_n(V)$; 2) 若 $\sigma_1, \sigma_2 \in O_n(V)$, 则 $\sigma_1\sigma_2 \in O_n(V)$; 3) 若 $\sigma \in O_n(V)$, 则 σ 可逆, 且 $\sigma^{-1} \in O_n(V)$.

§3 重点难点

本章的主题词是：线性函数，对偶空间，对偶基，双线性函数，双线性函数的度量矩阵，非退化双线性函数，对称双线性函数，反对称双线性函数，双线性度量空间，伪欧氏空间。

本章的基本方法是：函数值计算方法，线性（双线性）函数确定方法，对偶基求法，度量矩阵求法，正交基求法。

本章的重点是：线性函数，对偶空间，对称双线性函数。

线性函数是本章中出现的第一个概念；线性函数是构成对偶空间的基础；双线性函数在一定意义上，对于一个向量而言，就是线性函数，因此，线性函数成为本章的一个重点。

对偶空间是本章中出现的又一个概念，在多重线性代数中起着基本的作用；对偶基是一个基本的工具；就一定意义说来，任一 n 维线性空间均可以看成某个线性空间的对偶空间，因此，对偶空间成为本章的一个重点。

对称双线性函数是一类最重要的双线性函数，具有较多的性质，并且已被详细研究；对称双线性函数与二次齐次函数（二次型）有密切的联系；非退化对称双线性函数作为欧氏空间的内积的自然推广，并且由此产生了伪欧氏空间，因此，对称双线性函数成为本章的一个重点。

本章的难点是：对偶空间，反对称双线性函数，伪欧氏空间。

对偶空间既是本章的一个重点，又是本章的一个难点，原因在于：1）对偶空间的向量是线性函数，从而使对偶空间成为层次较高的概念；2）对偶基较抽象，且有关的计算较复杂；3） V, V^*, V^{**} 三者之间的关系，尤其 V 与 V^{**} 的同构，较难理解。解决困难的方法是：1）熟悉线性函数的概念及例子；2）具体地计算对偶基，以理解其意义；3）由 $(\Lambda')' = \Lambda$ ， $(\Lambda^{-1})^{-1} = \Lambda$ 等类比地理解 V^{**} 与 V 的关系。

反对称双线性函数成为本章的一个难点，原因在于：1) 对应的基较复杂；2) 非退化的情况与空间的维数有关。解决困难的方法是：1) 注意反对称双线性函数与反对称矩阵的关系；2) 注意反称双线性函数与对称双线性函数的联系与区别。

伪欧氏空间成为本章的一个难点，原因在于：1) 实际的模型（闵可夫斯基空间）不容易理解；2) 规范基的推证较复杂。解决困难的方法是：1) 用欧氏空间作类比；2) 注意实对称矩阵的有关结论及其应用。

§4 习题类解

I 计算题

一 求函数值

可以分为两种类型：1) 求线性函数的函数值；2) 求双线性函数的函数值。解决的一般方法是：先确定基向量的函数值，再计算一般向量的函数值。

例 1 设 V 是 F 上的 3 维线性空间， $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 V 的一组基， f 是 V 上的一个线性函数。已知 $f(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = 1, f(\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3) = -1, f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -3$ ，试求 $f(\alpha)$ ，其中 α 是 V 中任意向量。

解 由已知条件 得到

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_3) = 1 \\ f(\varepsilon_2) - 2f(\varepsilon_3) = -1 \\ f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) = -3, \end{cases}$$

解得， $f(\varepsilon_1) = 4, f(\varepsilon_2) = -7, f(\varepsilon_3) = -3$ 。设 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3$ ，则 $f(\alpha) = x_1f(\varepsilon_1) + x_2f(\varepsilon_2) + x_3f(\varepsilon_3) = 4x_1 - 7x_2 - 3x_3$ 。

例 2 设 V 是数域 F 上的 2 维线性空间， $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是 V 的一组基。已知 $f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 1, f(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -1, f(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = 1, f(\varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 2, \alpha = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \beta = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$ ，试求

$f(\alpha, \beta)$, 其中 f 是 V 上的双线性函数.

解 由已知条件, 得到

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1, \varepsilon_1) - f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + f(\varepsilon_2, \varepsilon_1) - f(\varepsilon_2, \varepsilon_2) = 1 \\ f(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -1 \\ f(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = 1 \\ f(\varepsilon_2, \varepsilon_1) + f(\varepsilon_2, \varepsilon_2) = 2, \end{cases}$$

解得, $f(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = 0, f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -1, f(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = 1, f(\varepsilon_2, \varepsilon_2) =$

1. 从而 $f(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -2$.

二 确定函数

要确定一个线性函数或双线性函数, 只要确定一组基向量的函数值.

例 3 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是数域 F 上的线性空间 V 的一组基, 试求 V 上的一个线性函数 f , 使得 $f(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = f(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_3) = 0$, $f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 1$.

解 由条件得到,

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_3) = 0 \\ f(\varepsilon_1) - 2f(\varepsilon_3) = 0 \\ f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) = 1 \end{cases}$$

解得, $f(\varepsilon_1) = f(\varepsilon_3) = 0, f(\varepsilon_2) = 1$. 对于 V 中的任意向量 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3$, $f(\alpha) = x_1f(\varepsilon_1) + x_2f(\varepsilon_2) + x_3f(\varepsilon_3) = x_2$.

三 求对偶基

可以分为两种类型: 1) 由 V 的基求 V^* 的基, 使成对偶; 2) 由 V^* 的基求 V 的基, 使成对偶. 解决的方法是: 1) 用对偶基的定义直接求; 2) 通过过渡矩阵求.

例 4 设 $V = F[x]_2$, 对于 $p(x) = c_0 + c_1x \in V$, $f_1(p(x)) = \int_0^2 p(x)dx$, $f_2(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx$, 试求 V 的一组基 $p_1(x), p_2(x)$, 使 f_1, f_2 是它的对偶基.

解 设 $p_1(x) = c_0 + c_1x$, $p_2(x) = d_0 + d_1x$, 则由对偶基的定义得

$$\begin{cases} f_1(p_1(x)) = \int_0^2 p_1(x) dx = 2c_0 + 2c_1 = 1 \\ f_1(p_2(x)) = \int_0^2 p_2(x) dx = 2d_0 + 2d_1 = 0 \\ f_2(p_1(x)) = \int_0^1 p_1(x) dx = c_0 + \frac{1}{2}c_1 = 0 \\ f_2(p_2(x)) = \int_0^1 p_2(x) dx = d_0 + \frac{1}{2}d_1 = 1 \end{cases}$$

解得, $c_0 = -\frac{1}{2}$, $c_1 = 1$, $d_0 = 2$, $d_1 = -2$. 从而, $p_1(x) = -\frac{1}{2} + x$, $p_2(x) = 2 - 2x$, f_1, f_2 是 $p_1(x), p_2(x)$ 的对偶基.

例 5 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是线性空间 V 的基, f_1, f_2, f_3 是它的对偶基, $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$, $\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\alpha_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ 是 V 的另一组基, 试求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的对偶基 g_1, g_2, g_3 .

解 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵为 A , 由定理知, f_1, f_2, f_3 到 g_1, g_2, g_3 的过渡矩阵为 $(A')^{-1}$. 而

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A')^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以, $g_1 = f_2 - f_3$, $g_2 = f_1 - f_2 + f_3$, $g_3 = -f_1 + 2f_2 - f_3$.

四 求度量矩阵

求度量矩阵的方法是: 1) 用定义求; 2) 通过两组基的过渡矩阵求.

例 6 在 \mathbf{F}^2 中定义双线性函数 $f(X, Y)$, 对于 $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$, $f(X, Y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$.

1) 给定 \mathbf{F}^2 的一组基 $\varepsilon_1 = (1, 0)$, $\varepsilon_2 = (1, 1)$, 求 $f(X, Y)$ 在该组基下的度量矩阵;

2) 另取一组基 η_1, η_2 , 满足 $(\eta_1, \eta_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)T$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $f(X, Y)$ 在 η_1, η_2 下的度量矩阵.

解 1) 由 $f(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = 2 - 0 + 0 = 2$, $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2 - 3 + 0 = -1$, $f(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = 2 - 0 + 0 = 2$, $f(\varepsilon_2, \varepsilon_2) = 2 - 3 + 1 = 0$ 得, $f(X, Y)$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的度量矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $f(X, Y)$ 在 η_1, η_2 下的度量矩阵是 $T'AT = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

II 证明题

一 函数及其性质

根据定义证明所给的函数是线性函数、双线性函数、对称双线性函数等。根据定义及有关结论证明函数具有某种性质。

例 1 设 A 是 F 上的一个 m 阶矩阵, 定义 $F^{m \times n}$ 上的一个二元函数 $f(X, Y) = \text{Tr}(X'AY)$, 对于 $X, Y \in F^{m \times n}$, 证明 $f(X, Y)$ 是 $F^{m \times n}$ 上的双线性函数。

证明 对于 $X_1, X_2 \in F^{m \times n}$, $k_1, k_2 \in F$, 成立 $f(k_1X_1 + k_2X_2, Y) = \text{Tr}((k_1X_1 + k_2X_2)'AY) = \text{Tr}(k_1X_1'AY + k_2X_2'AY) = \text{Tr}(k_1X_1'AY) + \text{Tr}(k_2X_2'AY) = k_1\text{Tr}(X_1'AY) + k_2\text{Tr}(X_2'AY) = k_1f(X_1, Y) + k_2f(X_2, Y)$. 类似地, 有 $f(X, k_1Y_1 + k_2Y_2) = k_1f(X, Y_1) + k_2f(X, Y_2)$. 因此, $f(X, Y)$ 是双线性函数。

例 2 设 V 是一个线性空间, f_1, f_2, \dots, f_s 是 V^* 中非零向量, 证明存在 $\alpha \in V$, 使 $f_i(\alpha) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, s$.

证明 对函数的个数 s 作数学归纳法。

当 $s = 1$ 时, 显然成立. 设 $s - 1$ 时成立, 考虑 s 的情况. 对于 f_1, \dots, f_{s-1} 用归纳假设, 有 $\alpha \in V$, 使 $f_i(\alpha) \neq 0$, $i = 1, \dots, s - 1$. 若 $f_s(\alpha) \neq 0$, 则结论成立. 若 $f_s(\alpha) = 0$, 则有 $\beta \in V$, 使 $f_s(\beta) \neq 0$. 在 $\alpha + \beta, 2\alpha + \beta, \dots, s\alpha + \beta$ 中, 必有 $t\alpha + \beta (1 \leq t \leq s)$, 使 $f_i(t\alpha + \beta) \neq 0$, $i = 1, \dots, s - 1$. 若不然, 则有 l, k , $1 \leq l < k \leq s$, 及 f_j 使得 $f_j(l\alpha + \beta) = f_j(k\alpha + \beta) = 0$, 从而 $(k - l)f_j(\alpha) = 0$, $f_j(\alpha) = 0$, 引出矛盾. 又, $f_s(t\alpha + \beta) =$

$tf_s(\alpha) + f_s(\beta) = f_s(\beta) \neq 0$, 所以 $f_i(t\alpha + \beta) \neq 0$, $i=1, \dots, s$, 结论同样成立.

二 线性空间的同构

按照同构的定义, 如同前面的几章中那样, 进行证明. 在有限维的情况下, 可以利用 V 与 V^* 同构的定理, 或者利用 V 与 V^* 同构的证明方法.

例 3 设 $f(\alpha, \beta)$ 是 n 维线性空间 V 上的非退化对称双线性函数, 对 V 中的一个元素 α , 定义 V^* 中一个元素 α^* : $\alpha^*(\beta) = f(\alpha, \beta)$, $\beta \in V$. 证明 V 到 V^* 的映射 $\alpha \rightarrow \alpha^*$ 是一个同构映射.

证明 易知, α^* 是 V 上的线性函数, 从而, $\alpha \rightarrow \alpha^*$ 是 V 到 V^* 的映射.

对于 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, 由于 $f(\alpha, \beta)$ 是非退化的, 所以有 $\beta \in V$, 使 $f(\alpha_1 - \alpha_2, \beta) \neq 0$, 从而 $f(\alpha_1, \beta) \neq f(\alpha_2, \beta)$, $\alpha_1^*(\beta) \neq \alpha_2^*(\beta)$, $\alpha_1^* \neq \alpha_2^*$, $\alpha \rightarrow \alpha^*$ 是单射.

对于 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$, $k \in \mathbf{F}$, $(\alpha_1 + \alpha_2)^*(\beta) = f(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = f(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta) = \alpha_1^*(\beta) + \alpha_2^*(\beta)$, $(k\alpha_1)^*(\beta) = f(k\alpha_1, \beta) = k\alpha_1^*(\beta)$.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 V 的一组基, 则其象 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*$ 为 V^* 的一组基. 事实上, 对于 $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbf{F}$, $k_1\alpha_1^* + k_2\alpha_2^* + \dots + k_n\alpha_n^* = 0^*$, 则由 $\alpha \rightarrow \alpha^*$ 是单射知, $0 \rightarrow 0^*$, 从而 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$, $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. 又, V^* 是 n 维的. 对任意 $\alpha^* \in V^*$, $\alpha^* = l_1\alpha_1^* + l_2\alpha_2^* + \dots + l_n\alpha_n^*$, 有 $\alpha = l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n \in V$, 而 $\alpha \rightarrow \alpha^*$, 因此 $\alpha \rightarrow \alpha^*$ 是满射.

综上所述, $\alpha \rightarrow \alpha^*$ 是同构映射.

例 4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 n 维线性空间 V 中非零向量, 证明有 $f \in V^*$ 使 $f(\alpha_i) \neq 0$, $i=1, 2, \dots, s$.

证明 对于 $\alpha \in V$, 作 α^{**} : $\alpha^{**}(f) = f(\alpha)$, $f \in V^*$, 则 α^{**} 是 V^* 上的线性函数. 由定理知, $\alpha \rightarrow \alpha^{**}$ 是 V 到 V^{**} 的同构映射.

根据同构的性质, 由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 非零, 得 $\alpha_1^{**}, \alpha_2^{**}, \dots, \alpha_s^{**}$ 非零. 利用例 2 的结果, 得到, 有 $f \in V^*$, 使 $\alpha_i^{**}(f) \neq 0$, 即 $f(\alpha_i) \neq 0$, $i=1, 2, \dots, s$.

说明 可以仿照例 2 来证明, 从而, 本例中“ n 维”的条件可以去掉, 请读者自己去做.

三 线性变换

有关线性变换的问题往往与线性函数等概念相联系, 证明时, 首先要搞清问题的含义, 而后根据有关的定义与性质去做.

例 5 设 σ 是 F 上的 n 维线性空间 V 的线性变换, 定义 $\sigma^*: f \rightarrow f\sigma$, $f \in V^*$, 证明 σ^* 是 V^* 的线性变换.

证明 容易证明, $f\sigma$ 仍为 V 上的线性函数, 即 $f\sigma \in V^*$, σ^* 是 V^* 的变换, 从略. 对任意 $f_1, f_2 \in V^*$, 任意 $k \in F$, 有 $\sigma^*(f_1 + f_2) = \sigma^*(f_1) + \sigma^*(f_2)$, $\sigma^*(kf_1) = k\sigma^*(f_1)$, 即, $(f_1 + f_2)\sigma = f_1\sigma + f_2\sigma$, $(kf_1)\sigma = k(f_1\sigma)$. 实际上, 对于任意 $\alpha \in V$, 有 $((f_1 + f_2)\sigma)(\alpha) = (f_1 + f_2)(\sigma(\alpha)) = f_1(\sigma(\alpha)) + f_2(\sigma(\alpha)) = (f_1\sigma)(\alpha) + (f_2\sigma)(\alpha) = (f_1\sigma + f_2\sigma)(\alpha)$, 同样 $((kf_1)\sigma)(\alpha) = (k(f_1\sigma))(\alpha)$. 因此, σ^* 是 V^* 的线性变换.

四 向量的正交

$f(\alpha, \beta)$ 为双线性函数, 若对于向量 α, β , 有 $f(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α, β 关于 f 正交. 利用双线性函数的性质及正交的定义, 证明向量正交的问题.

例 6 证明双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 是反对称的必要充分条件是任一向量均与其自身正交.

证明 设 $f(\alpha, \beta)$ 是反对称的, 则对于任一向量 α , 有 $f(\alpha, \alpha) = -f(\alpha, \alpha)$, 所以 $f(\alpha, \alpha) = 0$, α 与其自身正交.

反之, 若任一向量均与其自身正交, 则对于任一向量 α, β , 有 $f(\alpha, \alpha) = 0$, $f(\beta, \beta) = 0$, $f(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = 0$, 而 $f(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha) + f(\beta, \beta)$, 所以, $f(\alpha, \beta) +$

$f(\beta, \alpha) = 0, f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha), f$ 是反对称的.

§5 补充资料

I 复欧氏空间

设 V 是复数域 \mathbb{C} 上的线性空间, 在 V 上定义了一个非退化对称双线性函数 f , 则称 V 是一个复欧几里得空间, 简称复欧氏空间.

若 $f(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α, β 正交. 正交性是对称的. $\alpha \neq 0$, 但可以 $f(\alpha, \alpha) = 0$. 若一个向量 α 与 V 中所有向量均正交, 则 $\alpha = 0$.

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, $g_{ij} = f(\varepsilon_i, \varepsilon_j), i, j = 1, 2, \dots, n$, 则基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的度量矩阵 $G = (g_{ij})$ 是复对称矩阵.

在 V 中存在一组基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, 使该组基的度量矩阵为 E , 称 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 为第一类规范基.

当 $\dim V = n = 2m$ 时, 令 $\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_j + i\eta_{n-j+1}), \xi_{n-j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_j - i\eta_{n-j+1}), j = 1, 2, \dots, m$; 当 $\dim V = 2m + 1$ 时, 令 $\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_j + i\eta_{n-j+1}), \xi_{n-j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_j - i\eta_{n-j+1}),$

$j = 1, 2, \dots, m, \xi_{m+1} = \eta_{m+1}$; 其中 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 为 V 的第一类规范基, i 为虚数单位, 则 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 的度量矩阵是

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \cdot \\ & & & 1 & \\ & & & \cdot & \\ & & 1 & & \\ & & \cdot & & \\ & 1 & & & \end{pmatrix},$$

称为 V 的第二类规范基.

设 σ 是 n 维复欧氏空间 V 的一个线性变换. 若有 V 的线性变换 σ^* , 使得对于 V 中任意向量 α, β , 均成立 $(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma^*(\beta))$, 则称 σ^* 为 σ 的共轭变换.

若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组基, 该基的度量矩阵是 G , σ, σ^* 在该基下的矩阵分别是 A, B , 则有关系式 $B = G^{-1}A'G$.

设 σ 是 n 维复欧氏空间 V 的一个线性变换。若 $\sigma^* = \sigma$ ，则称 σ 为对称变换；若 $\sigma^* = -\sigma$ ，则称 σ 为反对称变换。

σ 是对称变换 $\Leftrightarrow \sigma$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵 A 满足 $A'G = GA$ ， G 为该基的度量矩阵（在第一类规范基下的矩阵为对称矩阵）。 σ 是反对称变换 $\Leftrightarrow \sigma$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵 A 满足 $A'G + GA = 0$ ， G 为该基的度量矩阵（在第一类规范基下的矩阵为反对称矩阵）。

设 σ 为 n 维复欧氏空间 V 的一个线性变换。若 σ 可逆，且 $\sigma^{-1} = \sigma^*$ ，则称 σ 为 V 的一个正交变换。

n 维复欧氏空间 V 的线性变换 σ 是正交变换 \Leftrightarrow 对于任意 $\alpha, \beta \in V$ ，有 $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \sigma$ 在 V 的某组基下的矩阵 A 满足 $A'GA = G$ ， G 为该基的度量矩阵。

若线性空间 V 的线性变换 σ 不以 -1 为其特征值，则称 σ 为非异线性变换。 σ 是 n 维复欧氏空间 V 的非异正交变换 $\Leftrightarrow \sigma = (Te - \tau)(Te + \tau)^{-1} = (Te + \tau)^{-1}(Te - \tau)$ ，其中 τ 是一个非异的反对称变换。

I 辛空间

设 V 是复数域 \mathbb{C} 上的 n 维线性空间，在 V 上定义了一个非退化反对称双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ ，则称 V 为辛空间。

辛空间的维数 n 必为偶数。

若 $f(\alpha, \beta) = 0$ ，则称 α 与 β 正交。正交性是对称的。每个非零向量 α 都与其自身正交。

设 V 是 $n = 2m$ 维辛空间，则有 V 的一组基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ；其度量矩阵为

$$G = \begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

这样的基称为第一类规范基。

设 V 是 $n = 2m$ 维辛空间，则有 V 的一组基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ，其度

量矩阵为 $\begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix}$, 其中 E 为 m 阶单位矩阵. 这样的基称为第二类规范基.

设 σ 是 $n=2m$ 维辛空间 V 的一个线性变换. 若有 V 的线性变换 σ^* , 使得对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 均有 $(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma^*(\beta))$, 则称 σ^* 是 σ 的共轭变换. 若 $\sigma^* = \sigma$, 则称 σ 是对称变换. 若 $\sigma^* = -\sigma$, 则称 σ 是反对称变换. 若 σ 可逆, 且 $\sigma^{-1} = \sigma^*$, 则称 σ 为正交变换.

σ 是正交变换 \Leftrightarrow 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 有 $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$.

设 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的度量矩阵为 G , V 的线性变换 σ 在该基下的矩阵为 A , 则: 1) σ 是对称变换 $\Leftrightarrow A'G = GA$; 2) σ 是反对称变换 $\Leftrightarrow A'G + GA = 0$; 3) σ 是正交变换 $\Leftrightarrow A'GA = G$.

$n=2m$ 维辛空间 V 的线性变换 σ 是一个非异的正交变换 $\Leftrightarrow \sigma = (Te - \tau)(Te + \tau)^{-1} = (Te + \tau)^{-1}(Te - \tau)$, 其中 τ 是一个非异的反对称变换.

III 多重线性代数

设 V 是数域 F 上的线性空间. 对于 V 中的 p 个向量 x, y, \dots, z 和对偶空间 V^* 中的 q 个向量 f, g, \dots, h 所组成的串 $x, y, \dots, z, f, g, \dots, h$, 对应地建立 F 上确定的数 $F(x, \dots, z, f, \dots, h)$, 则称在 V 上给出了序型 (p, q) 的有 $p+q$ 个变动向量的函数 F . 若 F 对于每个各别的变动向量 (其余向量不变) 都是线性的, 则称 F 是一个多重线性函数, 或多重线性型.

数域 F 上的线性空间 V 中序型 (p, q) 的张量是指这样的对应, 对于 V 的每一组基都能定出一个 $(p+q)$ 维列 $F \begin{smallmatrix} j_1 \cdots j_q \\ i_1 \cdots i_p \end{smallmatrix}$, 而对于不同的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 与 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n'$ 的列 $F \begin{smallmatrix} j_1 \cdots j_q \\ i_1 \cdots i_p \end{smallmatrix}$ 与 $F' \begin{smallmatrix} j_1 \cdots j_q \\ i_1 \cdots i_p \end{smallmatrix}$ 之间有关系式

$$F^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} = \sum_{\lambda_1, \cdots, \mu_q} \tau_{i_1 \lambda_1} \cdots \tau_{i_p \lambda_p} \sigma_{j_1 \mu_1} \cdots \sigma_{j_q \mu_q} F^{\mu_1 \cdots \mu_q}_{\lambda_1 \cdots \lambda_p}$$

存在, 其中 $T = (\tau_{ij})$ 是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 到 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n$ 的过渡矩阵, 而 $(\sigma_{ij}) = S = T'^{-1}$.

IV 历史资料点滴

1868年, 魏尔斯特拉斯完成了二次型的理论, 并且, 将其理论推广到双线性型 $a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1n}x_1y_n + \cdots + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n$.

Gregorio Ricci-Curbastro (1853—1925) 于1887至1896年这段时间里, 研究在坐标变换下不变形式的问题, 引进了张量的概念, 给出了1阶协变张量、2阶协变张量、1阶反变张量, 2阶反变张量等. 后来, Ricci和他著名的学生Tullio Levi-Civita (1873—1941) 共同进行这方面的工作.

数学家Georg Pick 让爱因斯坦注意Ricci和Levi-Civita的数学理论, 爱因斯坦学习了张量的理论, 并使张量成为表达相对论的优美的数学语言, 1916年爱因斯坦给出了“张量分析”的名字, 从而形成成为一门学科.

近年来, 多重线性代数已经成为微分几何、物理学、工程科学等许多领域的常用工具.

§6 基本习题

1 设 V 是数域 F 上的 3 维线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 V 的一组基, f 是 V 上的线性函数, 使得 $f(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = f(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_3) = 0$, $f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 1$, 试求 $f(\alpha)$, 而 $\alpha = 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - 5\varepsilon_3$.

2 设 V 是数域 F 上的 2 维线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是 V 的一组基, f 是 V 上的双线性函数, 使得 $f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 1$, $f(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -1$, $f(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = 1$, $f(\varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 2$, 试求出 f .

3 设 V 是数域 F 上的 2 维线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是 V 的一组基,

f_1, f_2 是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 的对偶基, 试求 V 的基 $\eta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \eta_2 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$ 的对偶基 (由 f_1, f_2 表出)。

4 $V = \mathbf{F}[x]_3$, 对 $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 \in V$, 定义 $f_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx, f_2(p(x)) = \int_0^2 p(x)dx, f_3(p(x)) = \int_{-1}^0 p(x)dx$, 试证 f_1, f_2, f_3 均是 V 上的线性函数, 并求出 V 的一组基 $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$, 使 f_1, f_2, f_3 为其对偶基。

5 在 \mathbf{F}^4 中定义双线性函数 $f(X, Y) = 3x_1y_2 - 5x_2y_1 + x_3y_4 - 4x_4y_3$, 其中 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4), Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, 试求 f 在 \mathbf{F}^4 的基 $\varepsilon_1 = (1, -2, -1, 0), \varepsilon_2 = (1, -1, 1, 0), \varepsilon_3 = (-1, 2, 1, 1), \varepsilon_4 = (-1, -1, 0, 1)$ 下的度量矩阵。

6 设 V 是数域 \mathbf{F} 上的线性空间, f 是 V 上的线性函数, 证明 $W = \{\alpha \mid \alpha \in V \text{ 且 } f(\alpha) = 0\}$ 是 V 的子空间。

7 设 (α, β) 是 n 维欧氏空间 V 的内积, 对于该欧氏空间 V 中的一个元素 α , 定义 V^* 中的一个元素 α^* : $\alpha^*(\beta) = (\alpha, \beta), \beta \in V$. 证明 V 到 V^* 的映射 $\alpha \rightarrow \alpha^*$ 是一个同构映射。

8 设 σ 是数域 \mathbf{F} 上的线性空间 V 的线性变换, f 是 V 上的线性函数, 证明 $f\sigma$ 是 V 上的线性函数。

9 设 $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的反对称双线性函数, K 是 V 的子空间, 证明 $K^\perp = \{\alpha \in V \mid f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in K\}$ 是 V 的子空间。

10 证明奇数维的线性空间 V 上的反对称双线性函数一定是退化的。

(孙宗明)

第十一章 代数基本概念介绍

§1 概括说明

我们已经研究过各种各样的对象，如数、多项式、向量、矩阵、变换等，它们的共同点是：可以进行某些运算，并且，运算具有某些性质，例如，满足结合律，满足交换律，等等。代数作为一门数学学科，主要就是研究运算的性质。本章中，我们把各种对象的共同点概括起来作统一的讨论，给出代数系统的概念，并对群、环、域三种最基本最要要的代数系统进行简单的讨论。这些内容，不仅在代数学中，而且在现代数学中，都是基本的。

本章的内容分为四个部分：代数系统，群，环，域。

所谓代数系统，就是定义了代数运算的非空集合。代数运算具有某些性质，称为运算律。我们将一般地讨论结合律、交换律、分配律。

群是含有一个代数运算的代数系统，从而被认为是最简单的代数系统，它作为其它代数系统（如环与域）的基础。我们给出群的定义，讨论群的若干性质，建立子群的概念，并研究群的同构。

环是有两个代数运算的代数系统，其代数运算分别称为加法与乘法。我们建立环的概念，讨论环中的运算规则，建立子环的概念，研究环的同构。

域也是环，同时，域可以看作两个群，通过对域的讨论，将会看到，域中的运算规则与数的通常的计算规则几乎完全相同。

本章的补充资料是：群的元素的阶，循环群的构造，等价关系与集合的分类，历史资料点滴。

§2 内容提要

I 代数系统

一 代数运算

设 A 是一个非空集合, 作 $A \times A = \{(a, b) | a, b \in A\}$. $A \times A$ 到 A 的一个映射 \circ 称为 A 的一个代数运算, 简称为运算. 即, 对于 A 中任意的有序的一对元素 a, b , 按照法则 \circ , 都有唯一确定的 A 的元素 c 与之对应, 记为 $a \circ b = c$, 称 c 是 a 与 b 进行运算的结果.

对于某个数域 F 而言, 数的通常的加法、减法、乘法均是 F 的代数运算, 而除法则不是; 另外, $x \circ y = x$, $x \circ y = x + y^2$ 也都是 F 的代数运算. 对于数域 F 上的线性空间 V 而言, 向量的加法是 V 的代数运算, 而数与向量的数量乘法则不是 V 的代数运算. 另外, 欧氏空间 V 的内积也不是 V 的代数运算.

二 运算定律

设 \circ 是 A 的代数运算. 若对于任意 $a, b, c \in A$, 均有 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, 则称 \circ 适合结合律.

设 A 的代数运算 \circ 适合结合律, 则对于 A 中的任意 $n (n \geq 2)$ 个元素 a_1, a_2, \dots, a_n 来说, 所有不同的加括号步骤, 得到的结果都是相等的, 记为 $a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n$.

设 \circ 是 A 的代数运算. 若对于任意的 $a, b \in A$, 均有 $a \circ b = b \circ a$, 则称 \circ 适合交换律.

若 A 的代数运算 \circ 适合结合律与交换律, 则在 $a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n (n \geq 2)$ 中元素的次序可以交换.

设 \odot, \oplus 是 A 的两个代数运算. 若对于任意 $a, b, c \in A$, 有 $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$, 则称 \odot 对于 \oplus 适合左分配律.

设 \odot, \oplus 是 A 的两个代数运算. 若 \oplus 适合结合律, \odot 对 \oplus 适合左分配律, 则对于任意 $a, b_1, b_2, \dots, b_n \in A, n \geq 2$, 成立

$$a \odot (b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots \oplus b_n) = (a \odot b_1) \oplus (a \odot b_2) \oplus \cdots \oplus (a \odot b_n).$$

类似地, 有右分配律.

三 代数系统

设 A 是一个非空集合, \odot 是 A 的一个代数运算, 则 A 与 \odot 合在一起, 称为一个代数系统, 记为 (A, \odot) , 有时简记为 A . $(\mathbb{Q}, +)$ (\mathbb{R}, \times) 、 $(\mathbb{C}, +)$ 等都是代数系统. 若 A 是有限集合, 则称 (A, \odot) 是一个有限代数系统. 否则, 称 (A, \odot) 是一个无限代数系统.

设 (A, \odot) 是一个代数系统, A_1 是 A 的非空子集. 若 \odot 也是 A_1 的代数运算, 换言之, A_1 对 \odot 封闭, 则称 (A_1, \odot) 是 (A, \odot) 的一个子代数系统.

四 代数系统的同构

设有代数系统 (A, \odot) 与 $(\bar{A}, \bar{\odot})$. 若有 A 到 \bar{A} 的双射 σ , 使得对于任意 $a, b \in A$, 均有 $\sigma(a \odot b) = \sigma(a) \bar{\odot} \sigma(b)$, 则称 σ 是 A 到 \bar{A} 的对于 \odot 与 $\bar{\odot}$ 的同构映射, 称 A 与 \bar{A} 对于 \odot 与 $\bar{\odot}$ 同构, 记为 $(A, \odot) \simeq (\bar{A}, \bar{\odot})$, 或者记为 $A \stackrel{\sigma}{\simeq} \bar{A}$, 简记为 $A \simeq \bar{A}$. A 到 A 对于 \odot 与 \odot 的同构映射, 称为 A 的自同构映射, 简称自同构.

代数系统的同构具有反身性、对称性、传递性.

若 A 与 \bar{A} 对于 \odot 与 $\bar{\odot}$ 同构, 则: 1) \odot 适合结合律 $\Leftrightarrow \bar{\odot}$ 适合结合律; 2) \odot 适合交换律 $\Leftrightarrow \bar{\odot}$ 适合交换律.

若 \odot, \oplus 是 A 的两个代数运算, $\bar{\odot}, \bar{\oplus}$ 是 \bar{A} 的两个代数运算, σ 是 A 到 \bar{A} 的双射, 使得 A 到 \bar{A} 对于 \odot 与 $\bar{\odot}$ 同构, 对于 \oplus 与 $\bar{\oplus}$ 也同构, 则: 1) \odot 对于 \oplus 适合左分配律 $\Leftrightarrow \bar{\odot}$ 对于 $\bar{\oplus}$ 适合左分配律; 2) \odot 对于 \oplus 适合右分配律 $\Leftrightarrow \bar{\odot}$ 对于 $\bar{\oplus}$ 适合右分配律.

抽象地看, 同构的代数系统被认为是相同的.

II 群

一 定义

设 G 是一个非空集合. 在 G 上定义了一个称之为乘法的代数运算, 并将 a 与 b 运算的结果记作 ab . 若: 1) $(ab)c = a(bc)$, 对任意 $a, b, c \in G$; 2) 存在 $e \in G$, 使得对于任意 $a \in G$, 成立 $ae = ea = a$, 称 e 是 G 的一个单位元素; 3) 对于任意 $a \in G$, 都相应存在 $b \in G$, 使得 $ab = ba = e$, 称 b 是 a 的一个逆元素, 则称 G 对于其代数运算作成一群, 简称 G 是一群.

整数加群 \mathbf{Z} , 有理加群 \mathbf{Q} , 实数加群 \mathbf{R} , 复数加群 \mathbf{C} , 非零实数乘群 \mathbf{R}^* , 正实数乘群 \mathbf{R}^+ , n 次单位根乘群 U_n ; 数域 F 上的线性空间 V 的全体可逆线性变换乘群; 数域 F 上的全体 n 阶可逆矩阵乘群(n 级线性群) $GL_n(F)$; 集合 M 的全变换群 S_M ; 等等, 都是群的例子.

设 G 是群. 若对于任意 $a, b \in G$, 均成立 $ab = ba$, 则称 G 为交换群, 或Abel群. 若群 G 的元素个数为有限, 则称 G 为有限群, 否则称为无限群. 有限群 G 所含元素的个数称为 G 的阶, 无限群 G 的阶称为无限, G 的阶记为 $|G|$ 或 $o(G)$.

群的定义包括两部分: 元素的集合, 运算. 同一个集合, 所定义的运算不同, 就成为不同的群.

二 性质

群 G 的单位元素是唯一的, 记作 e ; 群 G 的任一元素 a 的逆元素是唯一的, 记作 a^{-1} . 群 G 中成立消去律, 即, 对任意 $a, x, y \in G$, 成立: 1) 左消去律 $ax = ay \Rightarrow x = y$; 2) 右消去律 $xa = ya \Rightarrow x = y$. 对于群 G 中的任意元素 a, b , 方程 $ax = b$ 与 $ya = b$ 在 G 中均有解, 且均仅有一解.

在群 G 中定义元素的方幂: 对任意 $a \in G$, n 是正整数, $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n a$; $a^0 = e$; $a^{-n} = (a^{-1})^n$. 指数法则: 设 a 是群 G 的任一元素, m, n 是任意整数, 则成立 $a^n a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{nm}$; 而当 $a, b \in G$, $ab = ba$ 时, 还成立 $(ab)^n = a^n b^n$.

三 子群

若群 G 的非空子集 H 对于 G 的运算也作成一群,则称 H 是群 G 的子群.若 e 是群 G 的单位元素,则 $\{e\}$ 与 G 均是 G 的子群,称为平凡子群.若 G 还有其他的子群,则称为非平凡子群.

$n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 是整数加群 \mathbb{Z} 的子群,其中 n 为一固定整数.

若 H 是群 G 的子群,则 H 的单位元素就是 G 的单位元素 e , H 的任一元素 a 的逆元素,就是 a 在 G 中的逆元素 a^{-1} .

群 G 的非空子集成为 G 的子群 \Leftrightarrow (1) 对任意 $a, b \in H$, 有 $ab \in H$; (2) 对任意 $a \in H$, 有 $a^{-1} \in H$) \Leftrightarrow 对任意 $a, b \in H$, 有 $ab^{-1} \in H$.

群 G 的若干个子群的交是 G 的子群,而群 G 的两个子群 H_1 与 H_2 的并 $H_1 \cup H_2$ 是 G 的子群当且仅当 $H_1 \subseteq H_2$ 或 $H_2 \subseteq H_1$.

设 G 是群,作 $Z(G) = \{x \mid x \in G, xa = ax, \forall a \in G\}$, 则 $Z(G)$ 是 G 的子群,称为 G 的中心.

四 同构

设 G 与 \bar{G} 是两个群.若有 G 到 \bar{G} 的双射 σ ,使得对于任意 $x, y \in G$,均成立 $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$,则称 σ 是 G 到 \bar{G} 的同构映射,称 G 与 \bar{G} 同构,记为 $G \stackrel{\sigma}{\simeq} \bar{G}$,简记为 $G \simeq \bar{G}$.

设 G 是群, \bar{G} 是一个代数系统, \bar{G} 的代数运算也称为乘法.若 $G \stackrel{\sigma}{\simeq} \bar{G}$,则 \bar{G} 对于其乘法也作成一群.

设 G 与 \bar{G} 是两个群,且 $G \stackrel{\sigma}{\simeq} \bar{G}$,则: (1) G 的单位元素 e 与 \bar{G} 的单位元素 \bar{e} 互相对应,即 $\bar{e} = \sigma(e)$, $e \leftrightarrow \bar{e}$; (2) 若 G 的元素 a 与 \bar{G} 的元素 \bar{a} 互相对应,即 $\bar{a} = \sigma(a)$, $a \leftrightarrow \bar{a}$,则 a 的逆元素 a^{-1} 与 \bar{a} 的逆元素 \bar{a}^{-1} 互相对应,即 $\bar{a}^{-1} = \sigma(a^{-1})$, $a^{-1} \leftrightarrow \bar{a}^{-1}$.

设 G 是一个群.对于 G 的每一个元素 a ,定义

$$\sigma_a: G \rightarrow G, \sigma_a(x) = ax, \forall x \in G,$$

则 σ_a 是 G 到 G 的双射,即 σ_a 是 G 的一一变换,称 σ_a 是元素 a 所引

起的左平移。 $G_L = \{\sigma_a | a \in G\}$ 对于变换的乘法作成 一个群，且 $G \simeq G_L$ 。称变换群 G_L 为群 G 的左正则表示。

设 G 是一个群。对于 G 的每一个元素 a ，定义

$$\tau_a: G \rightarrow G, \tau_a(x) = xa^{-1}, \forall x \in G,$$

则 τ_a 是 G 到 G 的双射，即 τ_a 是 G 的一一变换，称 τ_a 是元素 a 所引起的右平移。 $G_R = \{\tau_a | a \in G\}$ 对于变换的乘法作成 一个群，且 $G \simeq G_R$ 。称变换群 G_R 为群 G 的右正则表示。

任何一个群都同构于某个变换群。历史上，群论最早是研究变换群的，而抽象的群的概念正是从变换群抽象出来的。

群的同构具有反身性、对称性、传递性。

抽象地看，同构的群被认为是相同的。

五 加群

设 G 是一个交换群。若把 G 的代数运算称为加法，并且把 a 与 b 的运算的结果记作 $a+b$ ，则称群 G 是一个加群。

设 G 是一个加群，则

- 1) $(a+b)+c=a+(b+c)$, $a+b=b+a$;
- 2) G 的唯一的单位元素记作 0 ，称为零元素；
- 3) G 的任一元素 a 的唯一的逆元素记作 $-a$ ，称为 a 的负元素，读作“负 a ”；
- 4) $a+(-b)$ 简写为 $a-b$ ，读作“ a 减 b ”；
- 5) 元素的方幂变为元素的倍，定义如下： n 是正整数， $1a=a$, $(n+1)a=na+a$, $(-n)a=n(-a)$, $0a=0$;
- 6) 指数规则变为倍数规则： $na+ma=(n+m)a$, $n(ma)=(nm)a$, $n(a+b)=na+nb$ ，其中 a, b 是 G 中任意元素， m, n 是任意整数。

六 置换群

当 M 为含有 n 个元素的有限集合时， M 的可逆变换称为 n 元置换， S_M 称为 n 次对称群，一般记作 S_n 。

M的元素就用 $1, 2, \dots, n$ 表示, 常称为 n 个文字, 从而 S_n 中的元素 σ 可以记为 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$, 其中 $i_j = \sigma(j)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

n 元置换与 n 阶排列之间存在双射, 从而 $|S_n| = n!$.

若 n 元置换 σ 把 $1, 2, \dots, n$ 中某两个文字互变, 而保持其余的文字不动, 则称 σ 是一个对换.

若 n 元置换 σ 把 $1, 2, \dots, n$ 中某 m 个文字 i_1, i_2, \dots, i_m , 轮换, 即 $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{m-1}) = i_m, \sigma(i_m) = i_1$, 而保持其余的文字不动, 则称 σ 是一个 m -轮换, 记作 $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_m)$. 若 σ 是 2-轮换, 则 σ 是对换. 若 $\alpha_i \neq \beta_j, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, t$, 则称两个轮换 $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)$ 与 $(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_t)$ 是不相连的. 不相连的轮换对乘法是可交换的.

每个 n 元置换 σ 都可以分解为不相连的轮换的乘积, n 个文字中的每个文字都出现于一个轮换中; 而且, 不计因子次序, 分解式是唯一的, 即: 若 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_t = \sigma'_1 \sigma'_2 \cdots \sigma'_u$ 是 σ 的两个分解式, 则必有 $t = u$, 且适当交换因子的次序之后有 $\sigma_k = \sigma'_k, k = 1, 2, \dots, t$.

任一个 n 元置换 σ 均可以写为对换的乘积, 其写法是不唯一的, 但是, 不同的写法中含对换个数的奇偶性是相同的, 由 σ 唯一决定.

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是 n 个文字, 而

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j),$$

对于 $\sigma \in S_n$, 定义

$$\begin{aligned} \sigma(D(x_1, x_2, \dots, x_n)) &= D(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \\ &= \prod_{i < j} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}). \end{aligned}$$

若 $\sigma(D) = D$, 则称 σ 为偶置换; 若 $\sigma(D) = -D$, 则称 σ 是奇置换.

σ 是偶置换 $\Leftrightarrow \sigma$ 可以写为偶数个对换之积； σ 是奇置换 $\Leftrightarrow \sigma$ 可以写为奇数个对换之积。 S_n 中奇偶置换各占一半($n \geq 2$)。

S_n 中的全体偶置换组成 S_n 的一个子群，称为 n 次交错群，记作 A_n 。 $|A_1| = |S_1| = 1$ ， $|A_n| = \frac{1}{2}n! (n \geq 2)$ 。

III 环

一 定义

设在非空集合 R 上定义了两个代数运算，一个称为加法，记作 $a+b$ ，一个称为乘法，记作 ab 。若满足：

1) 关于加法的以下规则：I) 加法结合律 $(a+b)+c = a+(b+c)$ ，任意 $a, b, c \in R$ ；II) 加法交换律 $a+b = b+a$ ，任意 $a, b \in R$ ；III) 有元素 $0 \in R$ ，使得对于任意 $a \in R$ ，成立 $a+0=a$ ；IV) 对于 R 中任意元素 a ，相应存在 $b \in R$ ，使得 $a+b=0$ ；

2) 乘法结合律 $(ab)c = a(bc)$ ，任意 $a, b, c \in R$ ；

3) 关于乘法和加法的分配律 $a(b+c) = ab+ac$ ， $(b+c)a = ba+ca$ ，任意 $a, b, c \in R$ ，

则称 R 对于其加法与乘法作成环，简称 R 是环。

整数环 \mathbb{Z} ；数域 F 上的一元多项式环 $F[x]$ ，多元多项式环 $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ；环 R 上的一元多项式环 $R[x]$ ；数域 F 上的 n 阶矩阵环 $M_n(F)$ ；环 R 上的 n 阶矩阵环 $M_n(R)$ ，也称为全阵环；只有一个元素 0 的环 $\{0\}$ ；等等，都是环的例子。

二 性质

若 R 是环，则 R 对于其加法作成一个加群，从而，环 R 有下列性质：

1) R 有唯一的零元素 0 ， $0+a=a+0=a$ ， $\forall a \in R$ ；

2) R 的每个元素 a 有唯一的负元素 $-a$ ， $-a+a=a-a=0$ ；

3) $-(-a)=a$ ， $\forall a \in R$ ；

4) $a+c=b \Leftrightarrow c=b-a$ ， $\forall a, b, c \in R$ ；

5) 去括号规则, $-(a+b)=-a-b$, $-(a-b)=-a+b$,
 $\forall a, b \in R$;

6) $(-n)a=n(-a)=-(na)$, $\forall a \in R, \forall n \in \mathbb{Z}$.

设 a 是环 R 的元素, n 是正整数, 定义方幂为: $a^1=a$,
 $a^{n+1}=a^n a$.

若 R 是环, 则对于任意 $a, b, c, a_i, b_j \in R$, 成立

1) $(a-b)c=ac-bc$, $c(a-b)=ca-cb$;

2) $0a=a0=0$ (三个零均是 R 的零元素);

3) $(-a)b=a(-b)=-ab$, $(-a)(-b)=ab$ (符号规则);

4) $a\left(\sum_{j=1}^n b_j\right)=\sum_{j=1}^n ab_j$, $\left(\sum_{j=1}^n b_j\right)a=\sum_{j=1}^n b_j a$,

$\left(\sum_{i=1}^m a_i\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j\right)=\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j$ (m, n 均为正整数);

5) $(na)b=a(nb)=n(ab)$, $(ma)(nb)=(mn)(ab)$, $m, n \in \mathbb{Z}$;

6) $a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 为正整数) (指数规则).

三 子环

设 S 是环 R 的非空子集. 若 S 对于 R 的代数运算也作成环, 则称 S 是 R 的子环.

环 R 的子集 $\{0\}$ 与 R 作成其子环, 称为 R 的平凡子环, 而其余的子环 (若还有的话), 称为 R 的非平凡子环.

若 S 是环 R 的子环, 则加群 S 是加群 R 的子加群, 从而, S 的零元素就是 R 的零元素, S 的任一元素 u 的负元素就是 u 在 R 中的负元素.

环 R 的非空子集合 S 作成 R 的子环 \Leftrightarrow 1) 对于任意 $u, v \in S$, 有 $u+v \in S$, 2) 对于任意 $u \in S$, 有 $-u \in S$, 3) 对于任意 $u, v \in S$, 有 $uv \in S$.

设 R 是环, 作 $C=\{x|x \in R, xr=rx, \forall r \in R\}$, 则称 C 是 R

的中心. C 是 R 的一个重要的子环.

$n\mathbb{Z}$ 是 \mathbb{Z} 的子环; $F[x_1]$ 是 $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 的子环;
 $M_n(F)$ 中的全体对角形矩阵作成其子环; 等等.

四 同构

设 R 与 \bar{R} 是两个环, σ 是 R 到 \bar{R} 的双射. 若对于任意 $a, b \in R$, 均有 $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$, $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$, 则称 σ 是 R 到 \bar{R} 的同构映射, 称 R 与 \bar{R} 同构, 记为 $R \stackrel{\sigma}{\simeq} \bar{R}$, 简记为 $R \simeq \bar{R}$.

设 R 是一个环, \bar{R} 是一个非空集合, 且 \bar{R} 有两个代数运算, 一个称为加法, 一个称为乘法. 若有 R 到 \bar{R} 的双射 σ , 使得 R 与 \bar{R} 关于它们的一对加法同构, 关于它们的一对乘法也同构, 则 \bar{R} 也是一个环.

若 R 与 \bar{R} 是两个环, 且 $R \simeq \bar{R}$, 则: 1) R 的零元素与 \bar{R} 的零元素相对应; 2) R 的元素 a 的负元素与 a 的象的负元素相对应.

抽象地看, 同构的环被认为是相同的.

IV 域

一 定义

设 F 是一个至少含两个元素的环. 若: 1) 有 $e \in F$, 使得对于任意 $a \in F$, 成立 $ae = ea = a$, 称 e 是 F 的单位元素; 2) 对任意 $a \in F$, $a \neq 0$, 都相应存在 $b \in F$, 使 $ab = ba = e$, 称 b 是 a 的一个逆元素; 3) 对于任意 $a, b \in F$, 有 $ab = ba$, 则称 F 是一个域.

数域, 有理分式域 $F(x)$, 有限域, 等等, 都是域的例子.

二 性质

设 F 是一个域, 则

1) $a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$; 2) $ab = ac, a \neq 0 \Rightarrow b = c$;

3) 记 $F^* = F \setminus \{0\}$, 即 F^* 是 F 中的非零元素的集合. F^* 对于 F 的乘法作成一个交换群, 称 F^* 为 F 的非零元素乘群, 简称为 F 的乘群, 从而 F 的单位元素唯一, 记为 e , F 的任一非零元素

a 的逆元素唯一, 记为 a^{-1} ;

4) 方程 $ax=b(a \neq 0)$ 在 F 中有且仅有一解.

域 F 描述如下: 加群 F 与乘群 F^* , 两个群由分配律联系着.

设 F 是一个域, $a, b, c, d \in F$, 且 $b \neq 0, d \neq 0$, 则 $b^{-1}a = ab^{-1}$, 记 $ab^{-1} = \frac{a}{b}$, 成立: 1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$; 2) $\frac{a}{b} +$

$$\frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}; \quad 3) \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

三 子域

设 F 是域, F_1 是 F 的至少含有两个元素的子集合. 若 F_1 对于 F 的代数运算也作成域, 则称 F_1 是 F 的子域.

有理数域是任何数域的子域.

若 F_1 是 F 的子域, 则加群 F_1 是加群 F 的子群, 乘群 F_1^* 是乘群 F^* 的子群, 从而: 1) F_1 的零元素就是 F 的零元素; 2) F_1 的任一元素 a 的负元素就是 a 在 F 中的负元素; 3) F_1 的单位元素就是 F 的单位元素; 4) F_1 的任一非零元素 a 的逆元素就是 a 在 F 中的逆元素.

域 F 的至少含有两个元素的子集 F_1 作成 F 的子域 \Leftrightarrow 1) 对任意 $a, b \in F_1$, 有 $a+b \in F_1$; 2) 对任意 $a \in F_1$, 有 $-a \in F_1$; 3) 对任意 $a, b \in F_1$, 有 $ab \in F_1$; 4) 对任意非零元素 $a \in F_1$, 有 $a^{-1} \in F_1$.

四 同构

设 F 与 \bar{F} 是两个域. 若有 F 到 \bar{F} 的双射 σ , 使得对于任意 $a, b \in F$, 有 $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$, $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$, 则称 σ 是 F 到 \bar{F} 的同构映射, 称 F 与 \bar{F} 同构, 记为 $F \stackrel{\sigma}{\simeq} \bar{F}$, 简记为 $F \simeq \bar{F}$.

若 R 与 \bar{R} 是两个环, 且 $R \simeq \bar{R}$, 则 R 是域 $\Leftrightarrow \bar{R}$ 是域.

若 F 与 \bar{F} 是两个域, 且 $F \simeq \bar{F}$, 则: 1) F 的零元素与 \bar{F} 的零元素互相对应; 2) F 的元素 a 的负元素与 a 的象的负元素互相

对应；3) F 的单位元素与 F 的单位元素互相对应；4) F 的非零元素 a 的逆元素与 a 的象的逆元素互相对应。

抽象地看，同构的域被认为是相同的。

行列式与线性方程组，一元多项式的因式分解，矩阵，线性空间与线性变换的一般理论，在一般的域上同样可以建立，与数域的情况几乎完全相同。

§3 重点难点

本章的主题词是：代数运算，交换律，结合律，分配律，代数系统，子代数系统，同构；群，整数加群 \mathbb{Z} ， n 次单位根乘群 U_n ， n 级线性群 $GL_n(F)$ ， n 次对称群 S_n ，交换群，有限群，单位元素，逆元素，子群，群 G 的中心 $Z(G)$ ，消去律，左(右)正则表示，加群， n 元置换；环，零元素，全阵环，子环；域，乘群，有限域，子域。

本章的基本方法是：元素运算与求逆法，置换化循环法，子代数系统求法，证明作成群(环、域)的方法，同构证明方法。

本章的重点是：代数运算，群，同构。

代数运算是本章的基础，运算定律出现在群、环、域概念中，因此，代数运算成为本章的一个重点。

群是第一个抽象的代数系统，群的概念的产生，开始了代数学的一个新的时期；群在数学其它分支、物理学、化学及其它领域有广泛的应用；群也作为环与域的基础，同时，对于群的讨论给环与域提供了范例，因此，群成为本章的一个重点。

同构是一个重要的讨论内容，是抽象代数学的一个基本的工具和方法，占有特殊的地位；抽象地看，同构的代数系统被认为是相同的，从而，同构常常起到化未知为已知的转化作用，因此，同构成为本章的一个重点。

本章的难点是：群，加群，环的定义。

群既是本章的一个重点，又是本章的一个难点，原因在于：群是所研究的第一个代数基本概念，群的定义以公理的形式出现，然后由定义推出各种性质，还要研究子群，研究群的同构，这些内容都是相当抽象的。解决困难的方法是：认真研究群的例子，既研究常见的例子，也研究不常见的例子，然后，从具体例子出发，较好地领会并掌握定义，再从定义出发研究其它问题。

加群成为本章的一个难点，原因在于：群的运算由乘过渡到加需要作认真的考虑，要有一个习惯的过程。解决困难的方法是：通过整数加群 \mathbb{Z} ，具体地研究乘与加的对应及相互转化。

环的定义成为本章的一个难点，原因在于：环有两种运算，而对于加法作成是一个加群；另外，两种运算由分配律联系着，较为复杂。解决困难的方法是：首先是通过环来进一步了解群的实质，迅速习惯这种由乘到加的转换过程，再用具体例子来分析和领会环的定义。

§4 习题类解

I 计算题

一 代数运算

根据代数运算的定义来判断某一法则是否是给定集合的代数运算。

设 A 是一个 n 元代数系统，将 A 的元素按顺序排出， $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ，而后画两条横、竖垂直线，将元素排于横线上方、竖线左方，第 i 行与第 j 列交叉处写上 a_i 与 a_j 运算的结果。从而，得到代数系统 A 的运算表。

例 1 数的普通除法是否是整数集 \mathbb{Z} 的代数运算？

解 $2, 3 \in \mathbb{Z}$ ，但 $2 \div 3 = 2/3 \notin \mathbb{Z}$ ，所以，数的普通除法不是 \mathbb{Z} 的代数运算。

例2 设 $F = \{\text{单}, \text{双}\}$, F 的加法定义为: 单 + 单 = 双 + 双 = 双, 单 + 双 = 双 + 单 = 单; F 的乘法定义为: 单 · 单 = 单, 单 · 双 = 双 · 单 = 双 · 双 = 双, 试列出 F 的运算表.

解	+	单	双		·	单	双
	单	双	单		单	单	双
	双	单	双		双	双	双

二 置换的运算

用置换的定义及其特别的表示形式, 进行运算.

例3 设 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, 试求 $\sigma\tau$, σ^{-1} .

$$\begin{aligned} \text{解 } \sigma\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \\ \sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

三 置换的分解

分解为不相连的轮换的乘积的方法: 取 1, 作 1, $\sigma(1)$, $\sigma^2(1), \dots$, 出现 $\sigma^t(1) = 1$, 且 t 为第一个这样的正整数, 从而得轮换 $\sigma_1 = (1\sigma(1)\sigma^2(1)\cdots\sigma^{t-1}(1))$; 在 σ_1 的文字之外另取一文字, 重复上述步骤得 σ_2 ; 一直下去, 得 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k$.

由 $(i_1 i_2 \cdots i_k) = (i_k i_{k-1}) \cdots (i_k i_3)(i_k i_2)(i_k i_1)$, 将置换分解为对换之积, 从而确定置换的奇偶性.

例4 求 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ 的轮换分解式.

$$\text{解 } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)(4\ 5).$$

例5 将 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 写为对换之积, 并确定其奇偶性.

解 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)(4\ 5)$
 $= (2\ 3)(2\ 1)(4\ 5)$, 是奇置换.

说明 计算得出, 排列 3 1 2 5 4 的逆序数为 3, 从而可以由此确定 σ 是奇置换.

四 子代数系统

要求出 (A, \circ) 的子代数系统, 可先求出集合 A 的非空子集, 再由运算表确定子代数系统, 当为群、环、域时, 还要注意使用有关的性质.

例 6 设有代数系统 (A, \circ) , $A = \{a, b, c, d\}$, \circ 如下表

\circ	a	b	c	d
a	a	a	b	a
b	a	a	c	b
c	c	a	b	c
d	a	b	c	d

试求出它的所有子代数系统.

解 子代数系统是: 4 个 1 元子集中有 $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{d\}$; 6 个 2 元子集中有 $A_3 = \{a, b\}$, $A_4 = \{a, d\}$; 4 个 3 元子集中有 $A_5 = \{a, b, c\}$, $A_6 = \{a, b, d\}$; 4 元子集 $A_7 = A$.

I 证明题

一 定义

按照所给的条件, 根据定义进行验证, 证明作成群、环、域.

例 1 \mathbf{R} 为实数集, 设 $M = \{(a, b) | a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0\}$, 在 M 上定义 $(a, b)(c, d) = (ac, ad + b)$, 证明这是 M 的一个代数运算, 并且, M 对于该运算作成一个群.

证明 $(1, 0) \in M$, 从而 M 非空.

对于 $(a, b), (c, d) \in M$, 由 $a \neq 0, c \neq 0$ 得 $ac \neq 0$, 从而, $(ac, ad + b) \in M$, 所以, 这是 M 的一个代数运算.

1) 易验证 $((a, b)(c, d))(e, f) = (a, b)((c, d)(e, f))$.

2) $(1, 0) \in M$, 且对于任意 $(a, b) \in M$, $(1, 0)(a, b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b + 0) = (a, b)$, $(a, b)(1, 0) = (a \cdot 1, a \cdot 0 + b) = (a, b)$.

3) 对于任意 $(a, b) \in M$, $a \neq 0$, 有 $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) \in M$, 且

$$(a, b)(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) = (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})(a, b) = (1, 0).$$

因此, M 对于该代数运算作成一个群.

二 性质

根据群(环、域)的定义及已经证明的性质, 证明群(环、域)具有某种性质.

例 2 若群 G 的每个元素 x 都适合 $x^2 = e$, 证明 G 是交换群.

证明 对任意 $x, y \in G$, 由条件得 $(xy)^2 = e$, $x^2 = e$, $y^2 = e$, 从而 $(xy)^2 = x^2 y^2$, 即 $xyxy = xxyy$, 由消去律得, $xy = yx$, 因此, G 是交换群.

例 3 设环 R 的每个元素 x 均适合 $x^2 = x$, 证明: 1) 对任意 $x \in R$, $x + x = 0$; 2) 对任意 $x, y \in R$, $xy = yx$.

证明 1) $(x+x)^2 = x+x$, $x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x+x$, $x+x+x+x = x+x$, $x+x=0$.

2) $(x+y)^2 = x+y$, $x^2 + xy + yx + y^2 = x+y$, $xy + yx = 0$, $x^2 y + xyx = 0$, $xyx + yx^2 = 0$, $xy + xyx = xyx + yx$, $xy = yx$.

三 子代数系统

按照子群(子环、子域)的定义及有关性质, 证明作成子群(子环、子域).

例 4 若 a 是群 G 的任一元素, 证明 G 中所有与 a 可交换的元素的集合 H 作成 G 的一个子群.

证明 由于 $ae = ea$, 所以 $e \in H$, 从而 H 非空.

对任意 $x, y \in H$, 有 $xa = ax$, $ya = ay$, 所以 $(xy)a = x(ya)$

$=x(ay)=(xa)y=(ax)y=a(xy)$, 从而 $xy \in H$.

对任意 $x \in H$, 有 $xa=ax$, 所以 $x^{-1}(xa)x^{-1}=x^{-1}(ax)x^{-1}$,
 $(x^{-1}x)(ax^{-1})=(x^{-1}a)(xx^{-1})$, $e(ax^{-1})=(x^{-1}a)e$, $ax^{-1}=x^{-1}a$, 从而 $x^{-1} \in H$.

因此, H 作成 G 的子群.

例 5 若 a 是环 R 的任一元素, $M=\{x|x \in R, xa=ax\}$, 证明 M 作成 R 的子环.

证明 由于 $0a=a0=0$, 所以 $0 \in M$, 从而 M 非空.

对于任意 $x, y \in M$, 有 $xa=ax, ya=ay$, 所以 $a(x-y)=ax-ay=xa-ya=(x-y)a$, $a(xy)=(ax)y=(xa)y=x(ay)=x(ya)=(xy)a$, $x-y, xy \in M$.

因此, M 作成 R 的子环.

四 同构

根据同构的定义及有关性质, 来证明关于同构的问题.

例 6 数域 F 上的所有 n 阶数量矩阵的集合 \overline{F} , 对于矩阵的加法与乘法作成一个域, 且 $F \simeq \overline{F}$. 试证明之.

证明 作 $\sigma: F \rightarrow \overline{F}$, $\sigma(a)=aE, \forall a \in F$, 则易证 σ 是 F 到 \overline{F} 的双射.

对任意 $a, b \in F$, $\sigma(a+b)=(a+b)E=aE+bE=\sigma(a)+\sigma(b)$, $\sigma(ab)=(ab)E=(aE)(bE)=\sigma(a)\sigma(b)$, 所以 $F \simeq \overline{F}$, 从而 \overline{F} 是一个域.

§5 补充资料

I 群的元素的阶

设 a 是群 G 的一个元素, 能够使 $a^m=e$ 的最小正整数 m 称为 a 的阶, a 称为 m 阶元素; 若这样的 m 不存在, 则称 a 的阶为无限, a 称为无限阶元素. U_n 中, $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ 的阶是 n ; Z 中,

1 的阶是无限.

若 a 是 n 阶元素, 则 $\{\cdots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, \cdots\} = \{a^1, a^2, \cdots, a^n\} = \{e, a^1, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$ 是一个 n 元集合. 若 a 的阶是无限, 则 $a^h = a^k \Leftrightarrow h = k$.

II、循环群的构造

若群 G 的每一个元素都是 G 的某一个固定元素 a 的方幂, 则称 G 是一个循环群, 并且, 称 G 是由元素 a 所生成的, 记作 $G = \langle a \rangle$, 称 a 是 G 的一个生成元.

若 $G = \langle a \rangle$, 则 $G = \{\cdots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, \cdots\}$.

整数加群 \mathbf{Z} 是循环群, 且 $\mathbf{Z} = \langle 1 \rangle$; n 次单位根乘群 U_n 是循环群, 且 $U_n = \langle \epsilon \rangle$.

若 $G = \langle a \rangle$, 则 G 的构造完全由 a 的阶来决定: 当 a 的阶是无限时, $G \simeq \mathbf{Z}$; 当 a 的阶是 n 时, $G \simeq U_n$.

研究群的目的, 就是把所有的群(互不同构的)都找出来, 并搞清楚每个群的构造, 所谓构造问题是指集合的元素构成及运算两个方面, 我们对循环群解决了这一问题, 概括如下:

1) $G = \langle a \rangle$, a 的阶为无限, 则 G 的元素构成集合 $\{\cdots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, \cdots\}$, G 的乘法是 $a^h a^k = a^{h+k}$;

2) $G = \langle a \rangle$, a 的阶为 n , 则 G 的元素构成集合 $\{a^0, a^1, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$, G 的乘法是 $a^i a^j = a^r$, $i+j=nq+r$, $0 \leq r \leq n-1$.

对于循环群的研究, 是抽象代数学中研究问题的一个缩影. 抽象代数学就是要研究各种代数系统, 而对于一个代数系统, 就是要解决三个问题: 存在问题、数量问题、构造问题, 对于循环群这种代数系统, 圆满地解决了三个问题, 达到了目的.

III 等价关系与集合的分类

设 A 是一个非空集合, 集合 $B = \{\text{有}, \text{无}\}$. 集合 $A \times A$ 到 B 的一个映射 R 称为 A 的元素之间的一个关系, 也称为集合 A 上的一个关系. 若 $R((a, b)) = \text{有}$, 则称 a 与 b 符合关系 R , 或称 a 与 b 有

关系 R ，记为 aRb ；若 $R((a, b))=\text{无}$ ，则称 a 与 b 不符合关系 R ，或称 a 与 b 没有关系 R ，记为 $a\overline{R}b$ 。

设 \sim 是集合 A 的元素之间的一个关系，若 \sim 满足：1) 反身性： $a\sim a$ ，任意 $a\in A$ ；2) 对称性： $a\sim b\Rightarrow b\sim a$ ；3) 传递性： $a\sim b, b\sim c\Rightarrow a\sim c$ ，则称关系 \sim 是一个等价关系。此时，若 $a\sim b$ ，则称 a 与 b 等价。

若把一个非空集合 A 分成若干个称为类的非空子集合，使得 A 的每个元素属于而且只属于一个类，则称这些类的全体是 A 的一个分类。

若 \sim 是集合 A 的元素间的一个等价关系，对于 $a\in A$ ，作 $[a]=\{x|x\in A, x\sim a\}$ ，则称 $[a]$ 是一个等价类，具体地说， $[a]$ 是 a 所在的等价类。

若 \sim 是集合 A 的一个等价关系，则对于 $a, b\in A$ ，有：1) $[a]=[b]\Leftrightarrow a\sim b$ ；2) $[a]\neq[b]\Rightarrow [a]\cap [b]=\phi$ （空集）。

集合 A 的一个分类决定 A 的元素间的一个等价关系；反之， A 的元素间的一个等价关系决定 A 的一个分类。

IV 历史资料点滴

一 开端

阿贝尔读了拉格朗日和高斯关于方程论的著作，当他还是中学生时，就按高斯对二项方程的处理方法着手探讨高次方程可解性的问题。阿贝尔证明了高于四次的一般方程用根式求解的不可能性。阿贝尔引进了域与给定域上的不可约多项式两个概念。阿贝尔还考虑了一些能用根式求解的特殊方程，被称为阿贝尔方程。

伽罗华从中学开始就致力于研究四次以上方程的根式解法。他把欧拉、高斯、雅可比、拉格朗日等数学名家的著作找来深入钻研，潜心攻读。对同时代的数学家阿贝尔的成果，他也进行了学习和了解。他努力探索解决问题的新途径。伽罗华在拉格朗日

和阿贝尔工作的基础上，与拉格朗日一样，用了根的置换或排列的概念，而且，他指出置换的乘积仍为置换，建立了置换群的概念（当然还不是抽象群的正式定义）。伽罗华指出根的置换群表示出根的不可区分的程度，给出了找出根的置换群的方法，巧妙而简洁地论证了四次以上的代数方程可以根式解的必要充分条件。

二 群

群论的创立者是伽罗华，他为自己的方程可解性理论锻造的基本工具，就是置换群的理论，他是在严格意义上用“群”这个字的第一个人。

抽象群的概念的产生是同研究置换紧密联系着的。凯莱于1849年第一个得到群的抽象概念，强调群的结构而不强调元素的具体性质。

1858年，戴德金从置换群出发，给有限群下了一个抽象定义。1878年，他把代数数模推广，给出了一个抽象的有限交换群。他在他的代数数理论的著作中，清楚地看到了理想和域这种结构的价值。他是抽象代数的卓有成效的创始人。

1870年，克朗奈格从Kummer（1848年）关于理想数的工作出发，给出了一个相当于有限交换群的抽象定义。他规定了抽象的元素和抽象的运算，说明运算有封闭性、结合性和交换性以及任一元素的逆元素存在且唯一。

1878年，凯莱又发表了四篇文章，进一步强调群是一个普遍的概念，置换群只是它的具体表现之一。随着时间的推移和其他条件的成熟，抽象群概念终于在十九世纪的七十年代为数学界所接受。

由于柯西、凯莱、西洛、S·Lie、弗罗宾纽斯、克莱因、庞加莱、赫尔德等的宏伟工作，群论的研究大步迈进，现在已经成为分支众多的代数学学科。

三 环

抽象环的理论是二十世纪的产物。克朗奈格把环称为“序”，“环”这个字是希尔伯特引进的。

十九世纪晚期，已有大量的各种具体的线性结合代数。抽象地看，这些代数都是环。当抽象环的理论形成之际，这些具体的代数就被吸收和推广。魏特邦在建造线性结合代数方面，做了大量的工作，他的不少文章和著作，推动了结合代数理论和整个抽象代数课题的进步。

诺特是为数极少的几个伟大的女数学家之一，她把环和理想的理论置于更为系统化和公理化的基础之上。她把希尔伯特的基定理重新表述如下：一个系数环上的任何多个变量的多项式所成的环，当这系数环有一个单位元素和一组有限基时，这多项式环本身也有一组有限基。在这种重新表述下，他把不变量理论变成了抽象代数的一部分。

多项式环的理想的理论在拉斯克手下得到了发展。他给出了一种决定一个已知多项式是否属于一个理想的方法，这理想是由 r 个多项式生成的。1921年诺特证明，这种多项式理想理论能由希尔伯特基定理推出。诺特和其它人对环和理想的抽象理论作了非常深刻的研究，并把它应用到其它各个数学领域。

四 域

实际上，域的概念是由阿贝尔最先引进的。

在伽罗华的著作里，由 n 个量 a_1, a_2, \dots, a_n 生成的域 F ，是指这些量经过加、减、乘、除（除数不为零）得到的量所构成的集合，而扩域这个概念就是添加 F 以外的一个新元素 α 到 F 所形成的。他的域就是由一个方程的系数所生成的域，他的扩域就是经添加方程的一个根而成的。在戴德金和克朗奈格关于代数数的著作里，域这个概念有着完全不同的起源。事实上，“域”（体）这个字出自于戴德金之手。

域的抽象理论是由韦伯开始的。他已经拥护群的抽象观点。

1893年他曾经给伽罗华理论以抽象的叙述，其中他引进了（交换）域作为群的派生。按照韦伯的说明，一个域是指一个由元素组成的集合，具有两种运算，称为加法和乘法，都满足封闭条件、结合律、交换律以及分配律。而且每一个元素在每一种运算下必有一个唯一的逆元素（乘法时零元素除外）。韦伯强调群和域是代数的两个主要概念。稍后，狄克森和享廷顿给出了域的一个独立的公理体系。

§6 基本习题

- 1 设 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, 试求 σ^2 , τ^3 , $\tau^{-1}\sigma$, $\sigma^{-1}\tau$.
- 2 设 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, 试决定 σ 的奇偶性.
- 3 试写出 6 次单位根乘群 U_6 的乘法表, 并求出 U_6 的所有子群.
- 4 对于群 G 中任意元素 x_1, x_2, \dots, x_s , 成立 $(x_1 x_2 \cdots x_s)^{-1} = x_s^{-1} x_{s-1}^{-1} \cdots x_2^{-1} x_1^{-1}$. 试证明之.
- 5 设 G, H 是群, 在 $G \times H = \{(g, h) | g \in G, h \in H\}$ 中规定: $(g, h)(g', h') = (gg', hh')$, 证明这是 $G \times H$ 的一个代数运算, 并且 $G \times H$ 对于该代数运算作成一个群.
- 6 设 F 是域, R 是环, F 与 R 同构, 证明 R 是域.
- 7 若 \mathbf{R} 是实数域, $\overline{\mathbf{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R} \right\}$, 证明 $\overline{\mathbf{C}}$ 对于矩阵的加法与乘法作成一个域, 并且 $\overline{\mathbf{C}}$ 与复数域 \mathbf{C} 同构.
- 8 证明交换环中二项式定理成立（交换环是指其乘法适合交换律的环）.
- 9 n 维欧氏空间 V 的全体正交变换作成一个群 $O(V)$, 且 $O(V)$ 同构于 $GL_n(\mathbf{R})$ 的一个子群, \mathbf{R} 表示实数域. 试证明之.
- 10 设 R 是环, $a \in R$. 若有正整数 n 使 $a^n = 0$, 则称 a 是 R 的一个幂零元. 证明交换环 R 的幂零元的集合作成 R 的一个子环.

高等代数参考书目录

- [1] 北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组, 高等代数, 高等教育出版社, 1978年3月第1版, 1988年3月第2版.
- [2] 北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组, 高等代数讲义, 高等教育出版社, 1965年7月第1版.
- [3] 北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组, 高等代数简明教程, 高等教育出版社, 1966年第1版.
- [4] 王萼芳, 高等代数, 上海科学技术出版社, 1981年7月第1版.
- [5] 王萼芳, 丘维声, 高等代数讲义, 北京大学出版社, 上册1983年5月第1版, 下册1984年5月第1版.
- [6] 兰以中, 高等代数教程, 北京大学出版社, 1988年12月第1版.
- [7] 复旦大学数学系, 高等代数, 上海科学技术出版社, 1960年6月第1版.
- [8] 屠伯坝等, 高等代数, 上海科学技术出版社, 1987年3月第1版.
- [9] 吉林大学数学系, 高等代数, 人民教育出版社, 1961年6月第1版.
- [10] 王湘浩, 谢邦杰, 高等代数, 人民教育出版社, 1961年6月第1版, 1964年6月第2版.
- [11] 谢邦杰, 高等代数简明教程, 高等教育出版社, 1966年第1版.
- [12] 南京大学数学天文系, 高等代数, 人民教育出版社, 1961年6月第1版.
- [13] 周伯坝, 高等代数, 人民教育出版社, 1966年4月第1版.
- [14] 张禾瑞, 郝炳新, 高等代数, 高等教育出版社, 上册1957年12月第1版, 下册1958年8月第1版; 人民教育出版社1960年7月合订本第1版; 人民教育出版社, 上册1979年2月第2版, 下册1979年6月第2版, 合订本1980年5月第2版; 高等教育出版社, 1983年9月第3版.
- [15] 曹锡皋等, 高等代数, 北京师范大学出版社, 1987年6月第1版.
- [16] 东北三省高师函授协编组, 高等代数(上、下册), 吉林人民出版社, 1981年7月第1版.
- [17] 师专试用教材, 高等代数, 吉林教育出版社, 1986年第1版.
- [18] 刘清祥, 高绪钰等, 高等代数(上、下册), 吉林教育出版社, 1987年9月第1版.
- [19] 贺昌亭主编, 高等代数, 辽宁人民出版社, 1933年第1版.
- [20] 冯春龄等, 高等代数, 黑龙江人民出版社, 1983年9月第1版.
- [21] 方嘉琳, 高等代数, 吉林人民出版社, 上册1957年7月第1版, 下册1957年11

月第1版。

- 〔22〕北京师范学院数学系代数教研室，高等代数，北京出版社，1979年1月第1版。
- 〔23〕汪经武等，高等代数，安徽教育出版社，1983年12月第1版。
- 〔24〕武汉教育学院等，高等代数，高等教育出版社，1988年10月第1版。
- 〔25〕湖南等九省教育学院数学系，高等代数概要，湖南大学出版社，1982年4月第1版。
- 〔26〕熊延煌主编，高等代数简明教程，湖北教育出版社，1987年10月第1版。
- 〔27〕李师正，多项式代数，山东人民出版社，1981年1月第1版。
- 〔28〕孔繁栋等，高等代数，上册，中南矿业学院出版社，1985年8月第1版；下册，中南矿业大学出版社，1986年2月第1版。
- 〔29〕许以超，代数学引论，上海科学技术出版社，1966年5月第1版。
- 〔30〕〔苏〕A.Γ.库洛什，高等代数教程，商务印书馆，1953年8月初版；高等教育出版社，1955年9月新1版，1956年10月第2版。
- 〔31〕〔苏〕E.C.里亚平，高等代数教程，高等教育出版社，1956年2月第1版。
- 〔32〕〔苏〕П.Я.奥库涅夫，高等代数，高等教育出版社，上册1957年6月新1版，下册1958年1月新1版。
- 〔33〕波赫耳，高等代数学通论，商务印的馆，1935年2月初版，1951年5月第5版。
- 〔34〕H.E.Hawkes著，马纯德译，高等代数学，北平文化学社，1936年2月。
- 〔35〕M.Böcher著，吴大任译，高等代数引论，商务印书馆。
- 〔36〕顾均正译，霍氏高级代数，开明书店，1947年11月初版，1948年6月再版。
- 〔37〕〔苏〕И.В.勃罗斯库列亚柯夫，数与多项式，高等教育出版社，1956年6月第1版。
- 〔38〕〔日〕弥永昌吉等，代数学，上海科学技术出版社，1962年11月第1版。
- 〔39〕〔苏〕A.И.乌兹科夫，代数，高等教育出版社，1958年4月新1版。
- 〔40〕〔英〕汉斯·里贝克，实用代数学，高等教育出版社，1985年7月第1版。
- 〔41〕〔美〕梧兹等，高等混合算（上卷），商务印书馆，1925年12月初版。
- 〔42〕〔法〕奎奈，高等数学基本教程（1·代数），高等教育出版社，1982年12月第1版。
- 〔43〕〔苏〕B.И.斯米尔诺夫，高等数学教程（三卷一分册），高等教育出版社，1954年9月新1版。
- 〔44〕郝克士著，高佩玉译，大代数，北平文化学社，1934年。
- 〔45〕范氏大代数，郑宗元译，上海群益书社；骆师会等译，香港中流出版社。
- 〔46〕〔英〕HALL-KNIGHT大代数（上、下册），席小云译，科学普及出版社，

1983年1月第1版.

- [47] [苏] C.И.诺注塞洛夫, 代数与初等函数, 高等教育出版社, 1954年9月第1版.
- [48] [苏] C.И.诺注塞洛夫, 初等代数专门教程, 高等教育出版社, 1956年10月第1版.
- [49] Von.H.Weber著, 郑太朴译, 数学全书(第二册, 代数), 商务印书馆, 1934年7月初版, 1953年5月第3版.
- [50] 北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组, 高等代数附册(习题答案与提示), 高等教育出版社, 1979年3月第1版.
- [51] [苏] A.K.法捷耶夫等, 高等代数习题集, 高等教育出版社, 1956年5月新1版, 1987年10月修订第2版.
- [52] 鲁铁编译, 高等代数演习, 香港知识丛书出版社.
- [53] 徐谷生, 高等代数题解, 艺文书社, 1946年10月第4版.
- [54] 周士藩等, 高等代数解题分析, 江苏科学技术出版社, 1985年11月第1版.
- [55] 杨子胥, 高等代数习题解, 山东科学技术出版社, 1982年10月第1版.
- [56] 王萼芳, 高等代数题解, 北京大学出版社, 1983年9月第1版.
- [57] 张枚, 高等代数习题选编, 浙江科学技术出版社, 1985年2月第1版.
- [58] 况良浩等, 高等代数讲义(上册)习题解答, 科学技术出版社重庆分社, 1985年11月第1版.
- [59] 魏献祝, 高等代数一题多解200例, 福建人民出版社, 1982年8月第1版.
- [60] 蔡剑芳等, 高等代数综合题解, 湖北科学技术出版社, 1986年6月第1版.
- [61] 钱吉林等, 高等代数研究生试题集锦, 湖北科学技术出版社, 1987年2月第1版.
- [62] 胡崇慧, 代数中的反例, 陕西科学技术出版社, 1983年6月第1版.
- [63] 刘云英等, 高等代数习作课讲义, 北京师范大学出版社, 1987年7月第1版.
- [64] 张远达, 浅谈高次方程, 湖北教育出版社, 1983年8月第1版.
- [65] 乔凤珠, 代数方程与方程组, 内蒙古人民出版社, 1987年1月第1版.
- [66] 刘培娜等, 一元代数方程, 科学出版社, 1985年10月第1版.
- [67] 余介石等, 高等方程式, 商务印书馆, 1951年10月第1版.
- [68] 布沙特著, 干仙椿译, 方程式论, 商务印书馆, 1934年6月初版, 1951年8月第4版.
- [69] 狄克逊著, 黄新铎译, 初级方程式论, 商务印书馆, 1935年7月初版, 1951年6月第6版.
- [70] 何鲁, 二次方程式详论, 商务印书馆, 1925年6月初版, 1931年10月再版.

*

*

*

*

*

〔71〕二、三年制师范专科学校教学大纲(供数学专业试用),高等教育出版社,1983年3月第1版.

〔72〕教育部师范教育司,(中学教师进修师范专科)数学专业教学大纲(试用本),北京师范大学出版社,1984年6月第1版.

〔73〕国家教育委员会师范教育司,(中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试)数学教学大纲(试用),北京师范学院出版社,1986年9月第1版.

〔74〕国家教育委员会师范教育司,(二年制师范专科学校)数学专业教学大纲,东北师范大学出版社,1989年3月第1版.

〔75〕(高等师范院校数学专业教学大纲)高等代数,高等教育出版社,1984年第1版.

* * * * *

〔76〕兰以中,线性代数引论,北京大学出版社,1981年8月第1版.

〔77〕栾汝书,线性代数,高等教育出版社,1983年9月第1版.

〔78〕陈龙玄等,线性代数简明教程,中国科学技术大学出版社,1989年2月第1版.

〔79〕复旦大学数学系,线性代数,上海科学技术出版社,1960年8月第1版.

〔80〕蒋尔雄等,线性代数,人民教育出版社,1978年8月第1版.

〔81〕谢邦杰,线性代数,人民教育出版社,1978年2月第1版.

〔82〕谢邦杰、牛凤文、董乃昌,线性代数,吉林大学出版社,1988年9月第1版.

〔83〕南京大学数学系计算数学专业,线性代数,科学出版社,1978年10月第1版.

〔84〕武汉大学数学系数学专业,线性代数,人民教育出版社,1977年7月第1版,1980年3月第2版.

〔85〕张远达,线性代数原理,上海教育出版社,1980年8月第1版.

〔86〕张远达,熊全淹,线性代数,人民教育出版社,1962年12月第1版.

〔87〕王楣卿,线性代数,山东教育出版社,1983年第1版.

〔88〕黄庆祥等,线性代数,湖南教育出版社,1987年第1版.

〔89〕杨慧,线性代数,东北师范大学出版社,1988年第1版.

〔90〕刘贵荣等,线性代数,陕西科学技术出版社,1987年5月第1版.

〔91〕〔苏〕A.И.马力茨夫,线性代数基础,高等教育出版社,1957年7月新1版,1959年4月新2版.

〔92〕〔苏〕И.М.盖尔冯德,线性代数学,商务印书馆,1953年12月初版;高等教育出版社,1957年1月新1版.

〔93〕〔苏〕Г.Е.希洛夫,线性空间引论,人民教育出版社,1957年10月新1版.

〔94〕〔匈〕I.FARKAS等,线性代数引论,人民教育出版社,1981年4月第1版.

〔95〕S.利普舒茨,线性代数的理论和习题,上海科学技术出版社,1981年11月第1版.

- [96] [日] 有马哲等, 线性代数讲解, 四川人民出版社, 1985年3月第1版.
- [97] [美] N. 贾柯勃逊, 抽象代数学(卷2, 线性代数), 科学出版社, 1960年3月第1版.
- [98] 李乔, 矩阵论八讲, 上海科学技术出版社, 1988年2月第1版.
- [99] 王耕禄等, 矩阵理论, 国防工业出版社, 1988年5月第1版.
- [100] 倪国熙, 常用的矩阵理论和方法, 上海科学技术出版社, 1984年4月第1版.
- [101] 钱吉林, 李照海, 矩阵及其广义逆, 华中师范大学出版社, 1988年4月第1版.
- [102] 蒋正新等, 矩阵理论及其应用, 北京航空学院出版社, 1988年3月第1版.
- [103] 曹志浩等, 矩阵计算和方程求根, 人民教育出版社, 1979年2月第1版.
- [104] 张远达, 行列式论与矩阵论, 商务印书馆, 1954年9月第1版.
- [105] 谢国瑞, 应用矩阵方法, 化学工业出版社, 1988年6月第1版.
- [106] [苏] $\Phi. P.$ 甘特马赫尔, 矩阵论, 高等教育出版社, 1955年2月上卷第1版, 1955年3月下卷第1版.
- [107] G. W. 斯图尔特, 矩阵计算引论, 上海科学技术出版社, 1980年1月第1版.
- [108] J. H. 威尔金森, 代数特征值问题, 科学出版社, 1987年10月第1版.
- [109] 盛正华, 线性代数与张量分析, 湖南科学技术出版社, 1985年1月第1版.
- [110] 王伯英, 多重线性代数基础, 北京师范大学出版社, 1985年5月第1版.
- [111] 孙璠, 数值线性代数讲义, 南开大学出版社, 1987年第1版.
- [112] 蔡大用, 数值代数, 清华大学出版社, 1987年9月第1版.
- [113] 屠伯坝, 线性代数(方法导引), 复旦大学出版社, 1986年11月第1版.
- [114] [日] 小西荣一等, 线性代数 向量分析, 辽宁人民出版社, 1981年1月第1版.
- [115] [德] 许来曷等, 解析几何与代数, 商务印书馆, 第一册, 1935年10月初版, 1950年3月第3版; 第二册, 1946年2月初版, 1950年3月第3版.
- [116] 胡莲云等, 线性代数是题200例分析, 陕西科学技术出版社, 1989年3月第1版.
- [117] 杨子胥, 矩阵与线性方程组, 山东人民出版社, 1980年5月第1版.
- [118] 孙梅生等, 行列式和线性方程组, 科学普及出版社.
- [119] 何鲁等, 行列式详论, 商务印书馆, 1924年6月初版, 1933年3月再版.
- [120] 高扬芝, 行列式浅说, 江苏人民出版社, 1958年5月第1版.
- [121] 藤原松三郎著, 萧君绛译, 行列式, 商务印书馆, 1936年6月初版.
- [122] 司各脱著, 黄缘芳译, 行列式之理论及其应用, 商务印书馆, 1935年1月初版, 1950年3月第3版.

- [123] 南京大学数学系计算数学专业, 线性代数计算方法, 科学出版社, 1979年 2 月第 1 版.
- [124] [苏] 法捷也娃, 线性代数计算法, 科学出版社, 1958年 7 月第 1 版.
- [125] G. E. 福赛恩等, 线代数方程组的计算机解法, 科学出版社, 1979年 11 月第 1 版.
- [126] 史明仁, 线性代数六百证明题详解, 北京科学技术出版社, 1985年 5 月第 1 版.
- [127] [苏] И. Б. 普罗斯库烈柯夫, 线性代数习题集, 人民教育出版社, 1981 年 7 月第 1 版.
- [128] [日] 小西荣一等, 线性代数 向量分析 习题集, 辽宁人民出版社, 1981 年 2 月第 1 版.
- * * * * *
- [129] 郭可詹, 线性代数学, 中国铁道出版社, 1980年 8 月第 1 版, 1988年 9 月修订版.
- [130] 程云鹏, 线性代数, 国防工业出版社, 1982年 7 月第 1 版.
- [131] 陈凯等, 线性代数及其应用, 水利电力出版社, 1985年 10 月第 1 版.
- [132] 周元意, 线性代数, 浙江大学出版社, 1987年 2 月第 1 版.
- [133] 张抱膝等, 线性代数及其应用, 南京大学出版社, 1986年 3 月第 1 版.
- [134] 蔡高厅等, 线性代数, 天津大学出版社, 1988年 9 月第 1 版.
- [135] 袁尚明, 线性代数, 上海交通大学出版社, 1988年 7 月第 1 版.
- [136] 谢国瑞, 线性代数, 华东化工学院出版社, 1988年 10 月第 1 版.
- [137] 俞南雁等, 线性代数教程, 东南大学出版社, 1988年 8 月第 1 版.
- [138] 朱幼文, 线性代数, 同济大学出版社.
- [139] 上海交通大学应用数学系, 线性代数, 上海交通大学出版社, 1988年 5 月第 1 版.
- [140] 孙显奕, 线性代数, 北京工业学院出版社, 1987年 6 月第 1 版.
- [141] 范蓓芳, 应用线性代数, 气象出版社, 1985年第 1 版.
- [142] 于明刚, 通俗线性代数, 山东教育出版社, 1986年第 1 版.
- [143] 温欣深, 罗锡佳, 线性代数与矩阵方法, 中南矿业大学出版社, 1988 年 10 月第 1 版.
- [144] 朱光贵, 线性代数讲义, 宇航出版社, 1989年 7 月第 1 版.
- [145] 许仁忠等, 线性代数, 四川科学技术出版社, 1988年 5 月第 1 版.
- [146] 南京工学院数学教研室, 线性代数, 高等教育出版社, 1986年 9 月第 1 版.
- [147] 彭旭麟, 线性代数, 高等教育出版社, 1985年 3 月第 1 版.

- [148] 上海交通大学线性代数编写组, 线性代数, 人民教育出版社, 1978年10日第1版, 1982年9月第2版.
- [149] 同济大学数学教研室, 线性代数, 高等教育出版社, 1982年3月第1版.
- [150] 陈开明, 线性代数, 上海科学技术出版社, 1987年4月第1版.
- [151] 雷春逵, 线性代数简明教程, 重庆大学出版社, 1987年7月第1版.
- [152] 傅长根, 线性代数, 北京工业学院出版社, 1987年12月第1版.
- [153] 黄午阳, 线性代数(修订本), 上海科学技术出版社, 1984年7月第1版.
- [154] 居余马等, 线性代数及其应用, 中央广播电视大学出版社, 1986年5月第1版.
- [155] 中国人民大学数学教研室, 线性代数, 中国人民大学出版社, 1983年5月第1版.
- [156] 李世达, 线性代数入门, 四川教育出版社, 1985年4月第1版.
- [157] 中央电大经济系, 线性代数与线性规划, 中央广播电视大学出版社, 1986年6月第1版.
- [158] 李祥伦, 线性代数与线性规划初步, 高等教育出版社, 1988年10月第1版.
- [159] 盛骤等, 线性代数与数理统计, 浙江大学出版社, 1988年6月第1版.
- [160] 叶显驰, 线性代数与常微分方程, 浙江大学出版社, 1989年4月第1版.
- [161] 朱俊龄, 线性代数与概率统计, 轻工业出版社, 1989年4月第1版.
- [162] 胡林主编, 线性代数学习指导, 水利电力出版社, 1986年5月第1版.
- [163] 戴宗儒等, 线性代数学习指导, 科学技术文献出版社, 1989年4月第1版.
- [164] 吴声钟等, 线性代数内容、方法与练习, 电子工业出版社, 1986年12月第1版.
- [165] 吴声钟等, 线性代数复习与解题指导, 北京经济学院出版社, 1988年10月第1版.
- [166] 卢振有, (电视大学辅导参考)线性代数, 辽宁科学技术出版社, 1985年9月第1版.
- [167] 胡金德等, 线性代数辅导, 清华大学出版社, 1986年4月第1版.
- [168] 石庆福等, 线性代数辅导, 中国铁道出版社, 1983年9月第1版.
- [169] 魏宗宣, 线性代数试题选解, 中南工业大学出版社, 1986年8月第1版.
- [170] 毛纲源, 线性代数解题方法和技巧, 湖南大学出版社, 1987年11月第1版.
- [171] 胡海涛, 线性代数解题分析, 湖南科学技术出版社, 1984年2月第1版.
- * * * * *
- [172] 梁宗巨, 世界数学史简编, 辽宁人民出版社, 1980年8月第1版.
- [173] 张奠宙, 赵斌, 二十世纪数学史话, 知识出版社, 1984年2月第1版.
- [174] [苏] Б. Б. 鲍尔加夫斯基, 数学简史, 知识出版社, 1984年1月第1版.

- [175] [苏] D. J. 斯特洛伊克, 数学简史, 科学出版社, 1956年12月第1版.
- [176] [英] 斯科特, 数学史, 商务印书馆, 1981年8月第1版.
- [177] [美] 吉特尔曼, 数学史, 科学普及出版社, 1987年11月第1版.
- [178] [苏] A. П. 亚历山大洛夫等, 数学(它的内容、方法和意义), 科学普及出版社, 第一卷1958年8月第1版, 第二卷1959年4月第1版, 第三卷1962年5月第1版.
- [179] [美] M. 克莱因, 古今数学思想, 上海科学技术出版社, 第1册1979年10月第1版, 第2册1979年8月第1版, 第3册1980年11月第1版, 第4册1981年7月第1版.
- [180] [德] W. 盖勒特等, 简明数学全书, 上海科学技术出版社, 第I册1981年5月第1版, 第II册1985年9月第1版.

(袁友凤)

高等代数参考文章目录

- [1] 杰, 代数的译名来源, 数学通报, 1960年第4期, 40页.
- [2] 方程简史, 赣南师院学报(自然版), 1987年增刊.
- [3] 李迪, 三次方程求根公式的历史, 数学通报, 1963年第11期, 46页.
- [4] 吴鸿迈, 关于韦达定理的名称, 数学通报, 1979年第5期, 22页.
- [5] 李文汉, 线性代数学简史, 数学通报, 1985年第8期, 35页.
- [6] 张尚志译, Gauss和最小二乘法的发明, 数学译林, 1982年第4期, 336页.
- [7] 从求根公式到群论的产生, 曲阜师大学报(自然版), 1986年第8期.
- [8] 乘航, 纪念伽罗华诞生150周年, 数学通报, 1961年第7期, 39页.
- [9] 黄汉平, 挖掘数学矿井宝藏的青年——伽罗华, 数学通报, 1984年第9期, 28页.
- [10] 解延年, 哈米尔顿, 数学通报, 1987年第6期, 42页.
- [11] 倪焯群译, 伽罗华传, 数学译林, 1983年第4期, 67页.
- [12] 张耀成译, 代数几何和有关的代数历史漫谈, 数学译林, 1981年第2期, 1页, 第3期, 27页; 1982年第1期, 28页, 第2期, 112页.
- [13] 周子平译, 数学模型: 数学哲学概述, 数学译林, 1989年第2期, 136页.
- [14] 俞曙霞译, 代数学的现代趋势, 数学译林, 1983年第4期, 1页.
- [15] 张宗燧, 代数在物理的应用, 数学通报, 1985年第8期, 2页.
- [16] 蒋巍译, 线代数学的基本概念, 数学通报, 1956年第9期, 1页; 1956年第10期, 1页.
- [17] 郝炳新, 线性代数简介, 数学通报, 1962年第5期, 40页; 1962年第9期, 29页; 1962年第7期, 37页; 1962年第8期, 31页.
- [18] 孙宗明, 高等代数复习纲要, 函授通讯(理科版)(泰安师专), 第2期, 107页; 第6期, 25页.
- [19] 利广才, 对高等代数教学大纲的理解和执行, 常德师专学报(自然版), 1988年第1期, 93页.
- [20] 蒋耘, 高等代数教学的点滴体会, 衡阳师专学报(自然版), 1981年第1期, 71页.

*

*

*

*

*

- [21] 许以超, 多项式理论, 数学通报, 1987年第7期, 29页; 1987年第8期, 32页.
- [22] 严士健, 张宁生, 从带余除法谈起, 数学通报, 1985年第10期, 32页.

- [23] 孙宗明, 在“带余除法定理”讲解中使用具体抽象法及探误补正法, 数学教学 (烟台师院), 第2期, 20页.
- [24] 许广胜, 带余除法的一个简单证明, 阜新师专学报 (自然版), 1986年第5期, 50页.
- [25] 刘惠棠, 判断多项式的整除的方法, 佛山师专学报 (自然版), 1987年第4期.
- [26] 岳振才, 多项式整除的矩阵判定, 汉中师院学报 (自然版), 1986年.
- [27] 苗俊德, 多项式带余除法定理的两种证法, 宝鸡师院学报 (自然版), 1985年第1期.
- [28] 汪士元, 多项式带余除法定理及其在一类行列式计算中的应用, 阴山学刊 (自然版), 1988年第1期, 101页.
- [29] 杜福昌等, 关于 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$ 中 $u(x)$, $v(x)$ 的三种求法, 辽宁师大学报 (自然版), 1984年第1期, 15页.
- [30] 曲阜师范学院数学系四年级科研小组, 关于用矩阵法求多项式的最大公因式的问题, 数学通报, 1964年第6期, 41页.
- [31] 池体涛, 两多项式最大公因式的简易求法, 数学通报, 1961年第2期, 29页.
- [32] 籍靠山, 验证整系数代数方程的有理根的又一方法, 数学通讯, 1983年第1期, 21页.
- [33] 张远达, 关于多项定理中系数间的一个问题, 数学通报, 1953年第7期, 33页.
- [34] 孙宗明, 多项式互质概念的若干等价条件, 开封大学学报, 1989年第3期, 56页.
- [35] 柳孟辉, 改进综合除法与整系数多项式有理根的检定, 数学通报, 1981年第2期, 24页.
- [36] 孙宗明, 多个多项式的最大公因式, 函授通讯 (理科版) (泰安师专), 第9期, 47页.
- [37] 周子期, 谈“余数定理”的证明, 数学通报, 1984年第8期, 12页.
- [38] 李克正, “代数基本定理”的一个初等证明, 数学通报, 1979年第4期, 30页.
- [39] 张宝琳译, 代数学基本定理, 数学通报, 1979年第6期.
- [40] 许绍楠, 代数基本定理的一个初等证明, 宁夏大学学报 (自然版), 1985年第2期.
- [41] 胡国华, 关于代数基本定理的证明, 唐山师专学报 (自然版), 1987年第2期.
- [42] 万哲先, 因式分解, 数学通报, 1957年第2期, 6页; 1957年第3期, 3页.
- [43] 孙宗明, 多项式的典型分解式及其应用, 数学函授 (内蒙古师大), 1987年第2期, 1页.

- [44] 何洛, 关于因式分解的克拉奈克定理, 数学通报, 1962年第9期, 24页.
- [45] 陈重穆, 关于整系数多项式的因式分解, 数学通报, 1963年第1期, 28页.
- [46] 佟文廷, 关于分圆多项式既约因子的性质, 数学通报, 1963年第7期, 37页.
- [47] 汤健儿, 对“关于分圆多项式既约因子的性质”一文的意见, 数学通报, 1963年第10期, 48页.
- [48] 李木, 整系数多项式的因式分解, 数学通报, 1979年第1期, 20页.
- [49] 马德昭, 关于二次三项式的因式分解, 数学通报, 1963年第9期, 27页.
- [50] 张群, 关于Eisenstein判别法的一点注记, 数学通报, 1984年第10期, 23页.
- [51] 郑格于, Eisenstein判别法的应用, 数学通报, 1988年第2期, 37页.
- [52] 马跃超, 整系数不可约多项式的两个判别法, 数学通报, 1988年第6期, 20页.
- [53] 卫东舟, $x^n \pm 1$ 在 Q 上的因式分解, 数学通报, 1988年第11期, 26页.
- [54] 许小川, 整系数多项式的分拆, 丽水师专学报(自然版), 1988年第1期.
- [55] 朱洪声, 含参数的一元多项式的因式分解, 云南师范大学学报(自然版), 1987年第4期, 40页.
- [56] 德仰淑, 谈谈四次有理系数多项式的因式分解, 数学通讯, 1980年第6期.
- [57] 江璧奎, 也谈四次有理系数多项式的因式分解, 数学通讯, 1983年第3期, 13页.
- [58] 李圣恩, 有理系数方程根的性质, 数学通讯, 1980年第2期, 16页.
- [59] 孙宗明, 虚根成对与无理根成对, 函授通讯(理科版)(泰安师专), 第10期, 50页.
- [60] 魏金和, 关于艾森施坦因判别法的一点注记, 固原师专学报(自然版), 1988年, 49页.
- [61] 徐长林, 关于艾森斯坦因判断法的几点讨论, 陕西教育学院学报, 1987年第3期.
- [62] 马跃超, 秦宏库, 与Eisenstein判别法相仿的另一种判别法的给出, 铁岭师专学报, 1986年第2期, 73页.
- [63] 刘延新, 关于方根型无理数判别法的几点补充, 齐齐哈尔师范学院学报, 1982年第1期, 20页.
- [64] 于宝满, 三次单位根在多项式整除及实数域上分解因式的应用, 本溪师专学报, 1986年第3期, 23页.
- [65] 杨翰深, 一元三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 的一个解法, 数学通报, 1982年第12期, 11页.
- [66] 池体涛, 由逐次逼近法求三次方程的根, 数学通报, 1961年第5期, 31页.
- [67] 刘光勋, 代数方程实根的一个近似算法, 数学通报, 1956年第9期, 8页.
- [68] 郑家驹, 方程的近似根求法, 数学通报, 1955年第9期, 11页.

- [69] 王世强等, 用牛顿法求实根界限的精确性, 数学通报, 1955年第7期, 18页.
- [70] 程廷熙, 罗巴切夫斯基求实根近似值法, 数学通报, 1954年第8期, 5页.
- [71] 逢明贤, 关于“任意实系数偶次代数方程存在实根”的结论, 吉林师院学报(自然版), 1984年第1期, 122页.
- [72] 黄学维译, 恒等于零的多项式定理在三角恒等式的证明上的应用, 数学通报, 1963年第1期, 26页.
- [73] 颜同照, 对称多项式, 数学通报, 1963年第10期, 15页.
- [74] 陈永年, 关于对称多项式定理的一点注记, 喀什师院学报(自然版), 1987年第2期, 15页.
- [75] 李德钦, 用组合化简 n 元对称多项式, 数学通报, 1984年第12期, 22页.
- [76] 师连城, 实系数多变数二次多项式的因式分解问题, 数学通报, 1963年第1期.
- [77] 喻睦全, 二元二次多项式可分解的充要条件, 庆阳师专学报(自然版), 1987年第1期, 15页.
- [78] 杨尚德, 域上多元多项式的最大公因子, 哈尔滨科学技术大学学报, 1987年第1期, 112页.
- [79] 唐佑华, 二元齐次对称多项式与二项式定理, 数学通报, 1984年第12期, 27页.
- [80] 单建新, 反证法在多项式理论中的应用, 数学通报, 1984年第9期, 12页.
- [81] 吴厚强, 多位综合除法, 数学通报, 1980年第6期.
- [82] 董名云, 张教森, 余数定理的推广, 宁夏大学学报(自然版), 1983年第1期, 41页.
- [83] 李全英, 韦达定理在解析几何中的应用, 数学通讯, 1980年第2期, 27页.
- [84] 刘成群, 关于一个高等代数习题的讨论, 数学通报, 1981年第5期, 30页.
- [85] 毛慧娟, 三次方程的一个解法, 数学通报, 1965年第3期, 33页.
- [86] 王则柯, 代数基本定理的一个构造性证明, 数学的实践与认识, 1980年第4期, 49页.
- [87] 孙梅生, 韩焕堂, $x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1$ 整除 $f(x)$ 之条件, 数学通报, 1951年第10期, 25页.
- [88] 韩新民, 用初等变换求最大公因式, 曲阜师大学报(自然版), 1986年第2期, 78页.
- [89] 包桐桢, 利用矩阵的初等变换求 n 个一元多项式的最大公因通式, 数学通报, 1989年第2期, 44页.
- [90] 蒋忠樟, 多项式最大公因式的矩阵求法, 数学通报, 1989年第6期, 23页.

*

*

*

*

*

- [91] 王世强, 关于行列式理论的公理构成, 数学通报, 1955年第4期, 18页.
- [92] 张雅静等, 行列式理论的公理定义, 太原重型机械学院学报, 1989年第10期, 56页.
- [93] 燕元音, 行列式, 数学通报, 1957年第3期, 10页; 1957年第4期, 4页.
- [94] 周相泉, 关于行列式的一点注记, 聊城师院学报(自然版), 1989年第2期, 30页.
- [95] 张年春, 李爱华, 条件全排列种数的行列式算法, 数学通讯, 1983年第1期, 28页.
- [96] 孙定浩, 范德曼德行列式的一个性质, 数学通报, 1963年第9期, 48页.
- [97] 张远达, 凡得蒙行列式的若干应用, 数学通讯, 1980年第2期, 1页.
- [98] 曲陆, 行列式的几种常用算法, 数学通报, 1965年第10期, 31页.
- [99] 卢业广, 行列式各项符号的确定法则, 数学通报, 1982年第10期, 25页.
- [100] 尹景尧, 有关 n 阶行列式的两个不等式及 R^n 中平行多面体的体积极值问题, 数学通报, 1983年第2期, 25页.
- [101] 李兆仁, 关于 n 阶行列式的一个等式, 数学通报, 1983年第9期, 26页.
- [102] 周德襄, 关于加边行列式的展开定理, 数学通报, 1984年第8期, 27页.
- [103] 彭明海, 谈“关于 n 阶行列式的一个等式”, 数学通报, 1986年第5期, 42页.
- [104] 李金山, 浅谈 n 阶行列式的计算问题, 德州师专学报(自然版), 1988年第2期, 1页.
- [105] 周士藩, 两个有趣的行列式性质, 商丘师专学报(自然版), 1988年第1期.
- [106] 周长生, 谈谈行列式的计算, 固原师专学报(自然版), 1988年, 40页.
- [107] 赵振威, n 阶行列式的若干解题思路, 苏州师专学报(自然版), 总第4期.
- [108] 万明柱, 杨启昌, 行列式的“中心展开”定理, 鞍山师专学报(自然版), 1984年第3期, 101页.
- [109] 杨启昌, Vandermonde行列式的一个应用, 鞍山师专学报(自然版), 1987年第4期, 1页.
- [110] 张福基等, 行列式的图论定义, 新疆大学学报(自然版), 1988年第4期, 6页.

* * * * *

- [111] 丙辛, 线性方程组的解法, 数学通报, 1961年第1期, 38页.
- [112] 张益敏, 线性方程组的同解变换与初等变换, 数学通报, 1985年第8期, 38页.
- [113] 钟育彬, 关于线性方程组的进一步讨论, 数学通报, 1987年第6期, 35页.
- [114] 钟育彬, 线性方程组及其限制解的讨论, 广州师院学报(自然版), 1987年

第1期, 106页.

- [115] 张兆君, 线性方程组的图解法, 昌潍师专学报(自然版), 1988年第1期, 40页.
- [116] 林棋桐, 关于实系数非齐次线性方程组的进一步讨论, 宁德师专学报(自然版), 1988年第1期.
- [117] 阎家雍, 一种求解线性方程组的方法, 大连铁道学院学报, 1989年第1期, 7页.
- [118] 袁俊伟, 关于线性方程组的基本定理, 鄂西大学学报, 1987年第7期.
- [119] 线性代数方程组的一种新解法, 扬州师院学报(自然版), 1986年第2期.
- [120] 向大晶, 关于Cramer法则的证明, 数学通报, 1988年第12期, 25页.
- [121] 杨子胥, 关于Cramer法则和线性方程组基本定理, 数学通报, 1986年第9期, 32页.
- [122] 杨子胥, Cramer法则的推广, 数学通报, 1983年第4期, 29页.
- [123] 张志贵, 克兰姆法则的又一推导, 数学通报, 1984年第10期, 25页.
- [124] 徐震, 关于Cramer定理的另一证明, 辽宁师范学院学报(自然版), 1979年第4期, 94页.
- [125] 佟文廷, 初等变换的记录矩阵法, 数学通报, 1964年第9期, 46页.
- [126] 林海明, 一类对称方程组的解, 数学通报, 1983年第4期, 33页.
- [127] 王传新, 线性方程组的命题方法, 辽宁师大学报(自然版), 1987年第4期, 94页.
- [128] 刘永刚, 用集合与映射刻画一般线性方程组的解的结构, 铁岭师专学报, 1989年第2期, 75页.
- [129] 路见可, 一次联立方程组的逐次近似解法, 数学通报, 1954年第12期, 14页.
- [130] 姜国贵, 解线性方程组的迭代法及其迭代过程的收敛条件, 数学通报, 1963年第5期, 41页.
- [131] 陈至达, 某种一次联立方程组的准确解法, 数学通报, 1955年第9期, 8页.
- [132] 卢虎, 关于方程组 $A'AX = A'B$ 的解及其在欧氏空间中意义的讨论, 青海师范大学学报(自然版), 1986年第1期, 77页.
- [133] 周学圣等, 线性方程组的降阶消去法, 山东工业大学学报, 1989年第1期, 49页.
- [134] 顾安娜, 相容线性方程组的有关反问题, 曲阜师大学报(自然版), 1989年第1期, 55页.
- [135] 王世强, 结式定理的一种证明, 数学通报, 1955年第2期, 5页.

- [136] 王炳安, 计算结式的一种方法, 数学通报, 1985年第12期, 41页.
- [137] 谢邦杰, 二元高次联立方程的解的个数问题, 数学通报, 1956年第1期, 4页.
- [138] 苏鸿斌, 一元二次方程有公共解的判别法, 数学通报, 1984年第10期, 26页.
- [139] 孙维君, 一类特殊高阶方程组的有解判定及解法, 淄博师专学报(自然版), 1987年第4期, 31页.
- [140] 李宁安, 关于高次不定方程 $\sum_{i=1}^n a_i x_i^{p_i} = S$ 整数解的一个关系式, 庆阳师专学报(自然版), 1987年第1期, 75页.
- * * * *
- [141] 罗国光, 从 $A_p(n)$ 方阵得来的定理, 数学通报, 1953年第10期, 39页.
- [142] 陈公宁, 二阶矩阵概述, 数学通报, 1979年第2期, 1页; 1979年第4期, 1页.
- [143] 吴福光, 关于矩阵代数中几个公式的证明, 数学通报, 1981年第1期, 29页.
- [144] 李夫林, 循环矩阵的几个性质, 数学通报, 1982年第2期, 30页.
- [145] 段海豹, 柯西公式的一些应用, 数学通报, 1982年第7期, 25页.
- [146] 冯贵良, 广义范得蒙矩阵和广义柯西矩阵, 数学通报, 1982年第7期, 28页.
- [147] 曲陆, 矩阵的逆, 数学通报, 1982年第8期, 29页.
- [148] 罗崇捷, 关于用伴随矩阵求逆阵的推导, 数学通报, 1983年第3期, 28页.
- [149] 2×2 矩阵的平方根, 数学通报, 1983年第4期, 23页.
- [150] 李宗铎, 求逆矩阵的一个方法, 数学通报, 1983年第11期, 27页.
- [151] 邓家产, 关于 n 阶矩阵 m 次方幂的通项公式问题, 数学通报, 1984年第8期, 23页.
- [152] 郑玉美, 用矩阵分解多项式的一次整因式, 数学通报, 1982年第9期, 23页.
- [153] 李庆国, 二行 n 列式在数列方面的应用, 数学通报, 1985年第2期, 44页.
- [154] 杨子胥, 用分块矩阵证明矩阵秩的一些性质, 数学通报, 1985年第3期, 40页.
- [155] 姚存峰, 利用四分块矩阵求 n 阶行列式的值, 数学通报, 1987年第10期, 40页.
- [156] 章秋明, 关于行初等变换的定理及其应用, 数学通报, 1987年第10期, 43页.
- [157] 张雁阁, 关于矩阵 $A^{-1}B$ 的简捷计算, 数学通报, 1986年第4期, 41页.
- [158] 姚存峰, 循环矩阵的逆, 数学通报, 1986年第10期.
- [159] 顾安娜, 复数域上非奇异矩阵 $A+iB$ 的逆矩阵, 曲阜师大学报(自然版), 1986年第1期, 42页.
- [160] 张维和, 分块矩阵的初等变换, 阜阳师院学报(自然版), 1986年第2期, 21页.

- 〔161〕 张景晓, 分块矩阵的初等变换, 德州师专学报(自然版), 1988年第2期, 16页.
- 〔162〕 刘家业, 关于用初等变换求逆阵方法的探讨, 许昌师专学报(自然版), 1988年第1期.
- 〔163〕 李长寿, 系数为 $m \times n$ 矩阵的矩阵方程, 江汉大学学报(自然版), 1988年第1期.
- 〔164〕 孙天名, 阶梯形矩阵及其应用, 上饶师专学报(自然版), 1988年第2期.
- 〔165〕 范如林, 列(行)满秩矩阵与弱逆矩阵及其应用, 邵阳师专学报(自然版), 1988年第1期.
- 〔166〕 余金钟, 可逆三角阵之逆方阵的求法, 周口师专学报(自然版), 1988年第1期.
- 〔167〕 寇福来, 矩阵在多项式理论中的一个应用, 张家口师专学报(自然版), 1988年第2期.
- 〔168〕 杨直中, 伴随矩阵的性质及证明, 云南师大学报(自然版), 1988年第2期, 11页.
- 〔169〕 姚克渊, 论初等矩阵之性能, 九江师专学报(自然版), 1987年第2期.
- 〔170〕 顾安娜, 关于矩阵方程 $MX=N$, 昌淮师专学报(自然版), 1987年第4期.
- 〔171〕 周士藩, 矩阵的积是幂等矩阵的特性, 宁夏大学学报(自然版), 1987年第1期.
- 〔172〕 王正文, 矩阵方程 $AX=B$ 的一种解法, 山东师大学报(自然版), 1987年第2期.
- 〔173〕 刘麦学, 谈矩阵的方幂计算, 洛阳师专学报(自然版), 1987年第1期.
- 〔174〕 张作飞, 对求特殊分块矩阵的逆矩阵的另一方法的注记, 零陵师专学报(自然版), 1987年第1期.
- 〔175〕 山玉林, 用线性方法求矩阵的逆, 楚雄师专学报(自然版), 1987年第4期.
- 〔176〕 田正平, 整数矩阵平方和的表示, 杭州师院学报(自然版), 1987年第2期.
- 〔177〕 彭明海, 利用矩阵探讨辗转相除的几个有关问题, 吉首大学学报(自然版), 1987年第1期.
- 〔178〕 姜印中, 关于几类矩阵方程的解法, 江汉大学学报(自然版), 1986年第2期.
- 〔179〕 周士藩, 一些广义逆矩阵类的有效表征, 江苏师院学报(自然版), 1980年第1期, 18页.
- 〔180〕 向光心, 矩阵方程的简捷解法, 广西师院学报(自然版), 1989年第2期, 62页.

- [181] 韩世忠, 两个矩阵相乘的另一种方法, 邵阳师专学报(自然版), 1987年第1期, 6页。
- [182] 梁宝琪, 关于分块初等变换, 沈阳师院学报(自然版), 1988年第1期, 15页。
- [183] 李日光, 矩阵函数级数的一致收敛性, 广西师院学报(自然版), 1987年。
- [184] 陈跃辉, 一个矩阵极值问题, 漳州师院学报(自然版), 1989年第1期, 50页。
- [185] 宋宝和, 矩阵的两种位置变化, 聊城师院学报(自然版), 1989年第1期, 30页。
- [186] 周士藩, 关于复数矩阵 $A+iB$ 的秩数, 许昌师专学报(自然版), 1989年第1期, 18页。
- [187] 王路群, 矩阵的广义秩, 黑龙江大学学报(自然版), 1989年第2期, 4页。
- [188] 张双义, 可逆的循环矩阵的一种求法, 宁夏教育学院学报(理科版), 1989年第1期, 46页。
- [189] 赵振奇, 逆阵及其求法, 开封大学学报, 1987年第1期, 63页。
- [190] 刘学圃, 矩阵的广义乘法及其应用, 衡阳师专学报(自然版), 1987年第2期, 1页。
- [191] 徐世明, 关于逆矩阵的一些充要条件, 成都大学学报(自然版), 1988年第2期, 59页。
- [192] 利广才, 浅谈矩阵的等价, 常德师专学报(自然版), 1987年, 第63页。
- [193] 田应福, 幂等矩阵的性质及其应用, 安顺师专学报, 1988年第2期, 77页。
- [194] 查金茂, 关于矩阵的Moore-Penrose广义逆的求法, 华中师大学报(自然版), 1989年第1期, 25页。
- [195] 高绩廷, 关于逆矩阵求法的探讨, 青岛师专学报(自然版), 1988年第3期, 14页。
- [196] 杨一新, 纯量矩阵的一些性质, 曲阜师大学报(自然版), 1989年第1期, 40页。
- [197] 郝同壬, 关于用分块矩阵法求逆阵, 广东工学院学报, 1988年第2期, 111页。
- [198] 高殿伟, 广义循环矩阵, 辽宁师大学报(自然版), 1988年第2期, 7页。
- [199] 杨忠鹏, 广义循环矩阵及其代数性质初探, 吉林师院学报(自然版), 1984年第1期, 125页。
- [200] 陈学金, 关于分块矩阵的一个定理的应用, 锦州师院学报(自然版), 1989年第1期, 18页。
- [201] 陈之琢, 矩阵的秩的几何意义, 鞍山师专学报, 1984年第3期, 105页。

- 〔202〕 颜荣方, 矩阵论中几个定理的概率证明, 西北师院学报(自然版), 1987年第2期, 71页.
- 〔203〕 周士藩, 矩阵 g -逆的一些等价命题, 新疆大学学报(自然版), 1985年第4期, 110页.
- 〔204〕 高安民, 分块矩阵的初等变换, 陕西师大学报(自然版), 1980年, 44页.
- 〔205〕 周程万, 对伴随矩阵的一点探讨, 抚州师专学报(自然版), 1985年第1期, 71页.
- 〔206〕 朱日照, 循环阵的奇异性判定, 东疆学刊, 1985年, 57页.
- 〔207〕 孙玉祥, 实方阵的秩的下界, 吉林师院学报(自然版), 1987年第2期, 30页.
- 〔208〕 杨忠鹏, 王典, 求 A 的 $\{2\}$ 逆的一种直接法, 吉林师院学报(自然版), 1987年第2期, 36页.
- 〔209〕 林永法, 用初等变换求矩阵的广义逆矩阵, 汉中师院学报(自然版), 1988年第2期, 17页.
- 〔210〕 张永胜, 几种矩阵方程的简单解法, 辽阳石油化专学报, 1988年第1期, 6页.
- 〔211〕 昔秀峰, 关于关联矩阵的一个定理的证明, 喀什师院学报(自然版), 1988年第3期, 23页.
- 〔212〕 王伟贤, 矩阵不可约的充要条件, 数学的实践与认识, 1988年第4期, 40页.
- 〔213〕 刘黄轩, 论加边矩阵的逆矩阵, 江西科学, 1988年第3期, 17页.
- 〔214〕 王金龙, 关于推广Vandermonde矩阵的一个注, 山西大学学报(自然版), 1988年第4期, 18页.
- 〔215〕 常福全, 用Cayley-Hamilton定理直接求有理分式矩阵的逆矩阵, 浙江工学院学报, 1988年第3期, 31页.
- 〔216〕 张晓京等, 求广义逆矩阵的一种算法, 南京邮电学院学报, 1988年第2期, 121页.
- 〔217〕 陈凤仁, 多项式代数中的矩阵方法, 大庆师专学报(自然版), 1988年第1期, 19页.
- 〔218〕 于宝业, 用分块矩阵的性质计算行列式, 唐山师专、唐山教育学院学报(自然版), 1988年第3期, 8页.
- 〔219〕 王国栋, 次-矩阵的广义逆性质, 云南大学学报(自然版), 1988年第1期, 84页.
- 〔220〕 周厚春, 有限次伴随矩阵的计算公式及其性质, 临沂师专学报(自然版), 1987年, 8页.
- * * * *
- 〔221〕 曹德超, 二次型的条件正定和条件负定, 数学通报, 1980年第11期, 21页.

- [222] 孙宗明,二次型与对称矩阵,函授通讯(理科版)(泰安师专),第4期,3页.
- [223] 高吉全,吴丹桂,二次型理论的一个应用,景德镇教育学院学报(自然版),1987年第2期,27页.
- [224] 方献亚,正定实对称矩阵的几个不等式,数学通报,1985年第3期,51页.
- [225] 李炯生,实方阵的正定性,数学通报,1985年第3期,67页.
- [226] 逢明贤,李庆春,正定矩阵的若干性质,吉林师院学报(自然版),1987年第2期,14页.
- [227] 周士藩,关于正定矩阵的一个行列式不等式,宁夏大学学报(自然版),1983年第1期,40页.
- [228] 宋旭东等,正定矩阵的几点注记,许昌师专学报(自然版),1988年第2期,100页.
- [229] 李炯生,关于正定实方阵的注记,高校应用数学学报,1988年第3期,346页.
- [230] 于继业,对称矩阵特征值问题的雅可比解法,海洋学报,1988年第1期,95页.
- * * * *
- [231] 张远达, n 维向量间的一个问题,数学通报,1955年第10期,11页.
- [232] 裘光明,向量,数学通报,1956年第4期,2页.
- [233] 赵维儒, n 维向量组的线性相关性,青岛化工学院学报,1989年第2期,91页.
- [234] 谭正俭,向量线性相关性例析,阜阳师院学报(自然版),1985年第1期.
- [235] 杨直中,用初等变换求极大无关组,昭通师专学报(自然版),1987年.
- [236] 叶克仁,对《高等代数》中替换定理的进一步理解,丽水师专学报(自然版).
- [237] 甘式辛,替换定理的拓广,玉林师专学报(自然版),1988年.
- [238] 雷中平,向量空间的“整体性”及其他,数学通报,1966年第1期,43页.
- [239] 姜久亮,对向量空间定义的注记,重庆师专学报(数学版),1988年第3期,21页.
- [240] 费国方,向量空间的拓广,咸宁师专学报(自然版),1988年第2期.
- [241] 王凯宁,关于线性空间的定义,数学通报,1980年第11期,20页.
- [242] 赵宝璋,向量空间定义中一公理的独立性,数学通报,1983年第4期,25页.
- [243] 沈泽琪,关于向量空间定义中第六条公理的独立性,西南师院学报(自然版),1984年第1期,52页.
- [244] 孙川,向量空间定义中运算公理的独立性,邵阳师专学报(自然版),1987年第2期.
- [245] 袁振邦,关于向量空间的定义,西南师院学报(自然版),1982年第3期,37页.

- [246] 王琦, 也谈“向量空间公理独立性”问题, 吉林师院学报(自然版), 1984年第1期, 131页.
- [247] 李传正, 线性空间替换定理的一个证明, 数学通报, 1987年第10期, 39页.
- [248] 常时炜, 林福荣, 线性无关向量组的扩充, 数学的实践与认识, 1987年第4期, 25页.
- [249] 陈世樵, 子空间的交的基与维数的一种确定方法, 数学通报, 1987年第11期, 37页.
- [250] 龙德明, 向量空间基和维数的等价定义及求法, 成都师专学报(理科版), 1989年第1期, 24页.
- [251] 吴昌恣, 线性空间若干问题的矩阵变换图解, 工科数学, 1988年第3期, 16页.
- [252] 刘泽庆, 关于维数公式的推广及直和的充要条件, 辽宁师大学报(自然版), 1985年第4期, 10页.
- [253] 吴永康, 有限维线性空间两种分解的关系, 南通师专自然科学论文集, 1985年, 32页.
- [254] 孙宗明, 线性空间 $V(P, n)$ 的基数, 泰安师专学报(自然版), 1985年, 23页.
- [255] 张庆德, n 维空间中子空间的构造及个数, 聊城师院学报(自然版), 1988年第1期, 75页.
- [256] 孙宗明, 线性空间的子空间之直和的等价条件, 南充师院学报(自然版), 1988年第1期, 51页.
- [257] 张星之等, 子空间的并仍为子空间的条件, 武汉教育学院学报(自然版), 1987年第2期, 18页.
- [258] 李启越, 关于维数公式的讨论, 湖南教育学院学报(自然版), 1988年第1期, 89页.
- [259] 唐佑华, 一类维数等于不定方程 $n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k = n$ 的非负整数解组个数的线性空间, 湘潭大学学报(自然版), 1987年第4期, 15页.
- [260] 辛未, 关于向量空间射影的和, 河南大学学报(自然版), 1988年第2期, 4页.
- [261] 郑文祥, 有限维与无限维线性空间的区别, 曲阜师大学报(自然版), 1988年第4期, 170页.
- [262] 王力军, 曹佩, 无限维向量空间, 内蒙古师大学报(自然版), 1987年第1期, 56页.

[263] 胡明, 无限维向量空间的同构, 景德镇教育学院学报(自然版), 1987年第2期, 23页.

*

*

*

*

*

[264] 蒋万菱, 关于线性变换的两个定理, 西南师大学报(自然版), 1987年第3期, 94页.

[265] 黎前修, 关于线性变换的两个命题, 重庆师专学报(自然版), 1988年第3期, 62页.

[266] 朱有仁, 向量空间的线性变换与基变换, 宝鸡师院学报(自然版), 1987年第1期.

[267] 徐希贤, 线性变换和线性方程组, 工科数学, 1988年第3期, 21页.

[268] 孙宗明, 数乘变换的若干等价条件, 常德师专学报(自然版), 1987年, 38页.

[269] 周士藩, 可逆线性变换剖析, 苏州大学学报(自然版), 1987年第4期.

[270] 樊启毅, 子空间上线性变换的延拓, 常德师专学报(自然版), 1986年.

[271] 钱正方, Hamilton-Cayley定理及最小多项式公式的简明证法, 成都电讯工程学院学报, 1988年第3期, 281页.

[272] 杨忠鹏, 关于置换矩阵的最小多项式, 曲阜师大学报(自然版), 1989年第3期, 83页.

[273] 孙宗明, $M_n(P)$ 的相似分类与 $LV(P, n)$ 的相似分类, 曲阜师院学报(自然版), 1983年第1期, 50页.

[274] 陈兴龙, 矩阵特征多项式的一种求法, 数学通报, 1988年第9期, 28页.

[275] 胥鸣伟译, Cayley-Hamilton定理的一个逆定理, 数学译林, 1986年第4期, 247页.

[276] 张耀成译, 不变子空间, 数学译林, 1981年第2期, 54页.

[277] 刘绍学, 变换、标准型与计算方法, 数学通报, 1962年第10期, 24页.

[278] 廖鸿志, 幂法求特征值的若干问题, 云南大学学报(自然版), 1988年第4期, 289页.

[279] 汪惠民, 关于矩阵特征值的一种表达方式, 安徽大学学报(自然版), 1988年第4期, 7页.

[280] 陈灵, 矩阵迹数的几个不等式的推广, 暨南理医学报, 1988年第3期, 6页.

[281] 秦奋涛等, 相似矩阵的特征向量间的关系, 张家口师专学报(自然版), 1987年第2期, 40页.

[282] 陈则民, 计算一类矩阵特征值的迭代法, 天津轻工业学院学报, 1988年第1期, 59页.

- [283] 华罗庚, 华苏, 具有左右二正特征矢量的实方阵的研究, 数学通报, 1985 年第 8 期, 30 页.
- [284] 孔令颐, 从一次齐次递推公式求通项的特征根法的一个初等证明, 数学通报, 1987 年第 12 期, 35 页.
- [285] 高祥山, 相似矩阵的标准形及其应用, 沈阳师院学报 (自然版), 1988 年第 2 期, 19 页.
- [286] 袁玉玲, 简化阶梯形矩阵及其应用, 曲阜师院学报 (自然版), 1983 年第 2 期, 27 页.
- [287] 孙宗明, 线性变换的矩阵成为准对角形的条件, 函授通讯 (理科版) (泰安师专), 第 7 期, 39 页.
- [288] 刘许成, 可对角化矩阵的一个判据, 昌潍师专学报 (自然版), 1988 年第 2 期.
- [289] 钟子玉, 有关矩阵迹的一些不等式, 娄底师专学报 (自然版), 1988 年第 9 期.
- [290] 赵九菊, 矩阵可对角化的一个判别法, 洛阳师专学报 (自然版), 1987 年第 1 期.
- [291] 王宽小, 使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵一种求 P 的方法, 包头师专学报 (自然版), 1987 年.
- [292] 薛国良, 关于矩阵迹数的几个不等式及其应用, 曲阜师院学报 (自然版), 1984 年第 4 期.
- [293] 王青义, 高玉金, 伴随矩阵的谱及对角化的条件, 吉林师院学报 (自然版), 1984 年第 1 期, 133 页.
- [294] 苏双飞等, 反对称循环实矩阵的对角化, 长沙铁道学院学报, 1989 年第 1 期, 75 页.
- [295] 姚存峰, 某些特殊矩阵同时对角化的问题, 济宁师专学报 (自然版), 1987 年第 1 期, 3 页.
- [296] 林永法, 关于矩阵迹的不等式, 华侨大学学报 (自然版), 1988 年第 3 期, 285 页.
- [297] 杨延龄, 矩阵的拟相似, 北京轻工学院学报, 1988 年第 1 期, 84 页.
- [298] 李坪皆, 矩阵可对角化的充要条件, 广东教育学院学报 (自然版), 1988 年第 3 期, 28 页.
- [299] 刘甲顺等, 对称及反对称三对角矩阵的特征向量, 曲阜师大学报 (自然版), 1988 年第 4 期, 74 页.
- [300] 张双义, 周期矩阵对角化的一种方法, 宁夏教育学院学报 (自然版), 1987 年第 2 期, 1 页.

〔301〕朱和平, 线性变换的矩阵可对角化的条件, 淮阴教育学院学报 (自然版), 1988年第3期, 1页.

〔302〕徐一青, 关于方阵相似的一个问题, 数学通报, 1981年第12期, 25页.

〔303〕周士藩, 对合矩阵相似于对角矩阵的一个简单性质, 数学通报, 1982年第5期, 27页.

* * * * *

〔304〕张家骅, 复数域上矩阵可用相似变换化为对角形的一个充要条件, 数学通报, 1963年第10期, 34页.

〔305〕戴宗铎译, 若当标准形的一个算法推导, 数学译林, 1985年第3期, 254页.

〔306〕导出若当法型的一个简单方法, 数学通报, 1964年第9期, 49页.

〔307〕郑格于, Jordan标准形的一个证法及Hamilton定理的推广, 郧阳师专学报 (自然版), 1984年第1期, 1页.

〔308〕汀汲湘, 方阵相似标准形, 数学通报, 1965年第6期, 30页.

〔309〕姚樵耕等, 矩阵约当化法的研究, 纺织学报, 1989年第1期, 95页.

〔310〕王文省, 关于Jordan标准形与Frobenius标准形, 聊城师院学报 (自然版), 1989年第2期, 14页.

〔311〕陈群, 带余除法在 λ -矩阵多项式中的推广, 淮阴教育学院学报 (理科版), 1988年第3期, 17页.

〔312〕孙昭洪, 求初等 λ -矩阵的行列式的一个简便方法, 昭通师专学报 (自然版) 1988年, 9页.

〔313〕刘新国, 几类特殊的矩阵多项式, 山东海洋学院学报, 1988年第2期, 74页.

〔314〕高明哲, 矩阵的若当分解及应用, 湘西教育学院学报 (自然版), 1987年第1期.

〔315〕詹仕林, 利用 λ -矩阵的初等变换求多项式的最大公因式, 韩山师专学报 (自然版), 1986年.

〔316〕周士藩, 徐震, 适合 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的方阵相似于若当标准形的一个简单方法, 辽宁师大学报 (自然版), 1985年第2期, 7页.

* * * * *

〔317〕伍秉伦, 有限维欧氏空间里内积的一般表示方法, 湘西教育学院学报 (自然版).

〔318〕庄吉全, 张汶, 欧氏空间的引进, 东疆学刊, 1985年, 101页.

〔319〕朱鼎勋, N维欧氏空间中向量的乘法, 安阳师专学报 (自然版), 1985年第1期.

〔320〕夏泽苗, 欧氏空间Cauchy不等式的应用, 益阳师专学报 (自然版), 1986年

第2期.

- [321] 欧其焕, 布尼雅可夫斯基不等式的推广, 数学通报, 1955年第11期, 17页.
- [322] 蔡大志, 一种正交化方法, 数学通报, 1986年第4期, 43页.
- [323] 孙宗明, 欧氏空间的标准正交基的四组特征性质, 开封大学学报, 1989年第1期, 43页.
- [324] 邱岫岩, 关于欧氏空间变换的一个注记, 辽宁师院学报(自然版), 1979年第4期, 43页.
- [325] 杨子肾, 欧氏空间中的线性变换, 山东师大学报(自然版), 1987年第2期, 149页.
- [326] 邱淦梯, 浅谈线性变换与对称变换的关系, 宁德师专学报(自然版), 1985年第1期.
- [327] 严家森, 关于正交变换的两个问题, 南充师院学报(自然版), 1988年第1期, 47页.
- [328] 仇永平, 合同变换正交化方法, 曲阜师大学报(自然版), 1988年第1期, 70页.
- [329] 卜淑云, 关于 R^n 的线性变换的“一次齐次性”和“连续性”, 广西师大学报(自然版), 1987年第3期, 18页.
- [330] 黄根荣, 矩阵次转置和Euclid空间与 U 空间上的一类线性变换, 温州师院学报(自然版), 1987年, 13页.
- [331] 杨仲华, 正交变换在数学分析中的某些应用, 数学通报, 1981年第5期, 30页.
- [332] 刘人丽, 正交变换的类型问题, 数学通报, 1984年10月, 23页.
- [333] 丁树良, 两个非负定矩阵乘积的特征值估计, 江西师大学报(自然版), 1984年第4期, 17页.
- [334] 曾广兴, 关于两个负定矩阵乘积的特征值的一个问题, 江西师大学报(自然版), 1989年第1期, 15页.
- [335] 李学良, 关于方阵分解的一个问题, 数学的实践与认识, 1985年第4期, 57页.
- [336] 郝稚传, 关于厄米特矩阵的一个不等式, 数学的实践与认识, 1985年第4期, 59页.
- [337] 张福基, “关于厄米特矩阵的一个不等式”的几点注记, 数学的实践与认识, 1987年第2期, 60页.
- [338] 刘森, 化实对称矩阵成对角形的两个技巧, 数学通报, 1987年第9期, 39页.
- [339] 刘建洲, 与正定Hermite矩阵有关的一类不等式, 高等数学, 1987年第4期, 43页.

- [340] 蒋念生, 实对称矩阵的某些不等式, 西南师大学报(自然版), 1987年第4期, 22页.
- [341] 卢业广, 次对称矩阵和次正交矩阵, 工科数学, 1989年第1期, 13页.
- [342] 刘钊南, 正交矩阵的作用, 湘潭师院学报(自然版), 1987年第2期, 10页.
- [343] 叶怀安, 关于无限维欧氏空间中的直交子空间的直交补, 数学通报, 1983年第6期, 29页.
- [344] 田校贵, 无限维欧氏空间和有限维欧氏空间在正交性上的差异, 数学通报, 1982年第6期, 26页.
- [345] 冯浩鉴, 矩阵代数在最小二乘法中的应用, 数学通报, 1963年第6期, 131页.
- [346] 邵品琮, 最小二乘法介绍, 数学通报, 1963年第7期, 27页.
- [347] 安鸿志, 最小二乘法在滤波中的应用, 数学的实践与认识, 1972年第6期, 73页.
- [348] 邵品琮, 关于修正最小二乘法的计算, 数学通报, 1987年第8期, 38页.
- * * * * *
- [349] 华德康, 有限维内积空间的一些性质, 北京师院学报(自然版), 1988年第4期, 9页.
- [350] 迟培英, 在一般内积空间上的Kronecker乘积, 哈尔滨科学技术大学学报, 1988年第3期, 107页.
- [351] 殷志建, 关于张量的定义, 数学通报, 1964年第12期, 35页.
- [352] 朱忠南, 子空间次正交与反对称张量空间中可合元素的关系, 南京大学学报(自然版), 1988年第4期, 743页.
- [353] 刘国隆等, 双线性变换的递推统一算法, 华北电力学院学报, 1988年第1期, 75页.
- [354] 袁俊伟, 关于三元线性型的Frobenius问题, 西南师大学报(自然版), 1987年第3期, 10页.
- * * * * *
- [355] 千溪, 谈谈集合的基数, 数学通报, 1979年第2期, 22页.
- [356] 金成梁, 谈关系, 数学通报, 1980年第8期, 5页.
- [357] 孙梅生, 运算律, 数学通报, 1962年第10期, 40页.
- [358] 孙梅生, 有理化因子的存在和求法, 数学通报, 1957年第11期, 12页.
- [359] 蒋巍, 关于分圆问题, 数学通报, 1957年第8期, 1页.
- [360] 邵品琮, 关于三分角问题的近似作图法问题, 数学通报, 1963年第10期, 27页.

(孙宗明)

附录一 扩域与尺规作图

本文中，我们首先建立扩域的概念，研究扩域的结构；而后建立有限扩域的概念，研究扩域的次数；再建立代数单扩域的概念，研究其结构；最后，解决尺规作图问题。

定义1 若域 F 是域 E 的一个子域，则称域 E 是域 F 的一个扩域（扩张）。

研究域的理论称为域论。域论的研究方法是：从一个给定的域 F 出发，来研究它的扩域，从而找出 F 的所有扩域。

下面粗略描述一下扩域的结构，为此，引入

定义2 设 E 是域 F 的一个扩域， S 是 E 的一个子集合， E 的包含 F 和 S 的最小子域记为 $F(S)$ ，即，若 E_1 是 E 的一个子域， $F \subseteq E_1$ ， $S \subseteq E_1$ ，则 $F(S) \subseteq E_1$ ，此时，称 $F(S)$ 是添加 S 于域 F 所得的扩域。

定理1 若 E 是域 F 的一个扩域， S 是 E 的一个子集合，则 $F(S)$ 是存在的，且

$$F(S) = \{f_1(a_1, \dots, a_n)/f_2(a_1, \dots, a_n)\}$$

其中 $a_1, \dots, a_n \in S$ ， f_1, f_2 是 F 上的 a_1, \dots, a_n 的多项式，且 $f_2 \neq 0$ 。

证明 1) $F(S)$ 的存在性。 E 确有包含 F 与 S 的子域，如 E 自身即是，从而，一切这样的子域的交集是存在的，记为 E_2 ，则 $E_2 = F(S)$ 。事实上，首先， $F \subseteq E_2$ ， $S \subseteq E_2$ ；其次，对于 E 的任一子域 E_1 ，若 $F \subseteq E_1$ ， $S \subseteq E_1$ ，则由于 E_2 是 E 的包含 F 与 S 的一切子域的交集，所以 $E_2 \subseteq E_1$ 。因此，由定义2得， $E_2 = F(S)$ 。

2) 为简单，记

$$M = \{f_1(a_1, \dots, a_n)/f_2(a_1, \dots, a_n)\}$$

则容易证明 M 作成 $F(S)$ 的子域，从略。又易知 M 包含 F 及 S ，于是 $F(S) \subseteq M$ 。所以， $F(S) = M$ 。证完。

定理2 若 E 是域 F 的一个扩域， S_1 和 S_2 是 E 的两个子集，则 $F(S_1)(S_2) = F(S_1 \cup S_2) = F(S_2)(S_1)$ 。

证明 1) 先证明， $F(S_1)(S_2) = F(S_1 \cup S_2)$ 。

易知， $F(S_1)(S_2)$ 是 E 的包含 F ， S_1 ， S_2 的一个子域，而 $F(S_1 \cup S_2)$ 是 E 的包含 F ， S_1 ， S_2 的最小子域，所以， $F(S_1 \cup S_2) \subseteq F(S_1)(S_2)$ 。另一方面，由于 $F(S_1 \cup S_2)$ 包含 F ， S_1 ， S_2 ，所以包含 $F(S_1)$ ， S_2 ，而 $F(S_1)(S_2)$ 是 E 的包含 $F(S_1)$ ， S_2 的最小子域，因此， $F(S_1)(S_2) \subseteq F(S_1 \cup S_2)$ 。

2) 同样可证明， $F(S_2)(S_1) = F(S_1 \cup S_2)$ 。证完。

定义3 当 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 时, $F(S)$ 记为 $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

从而, $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = F(a_1)(a_2) \cdots (a_n)$.

这样, 添加一个有限集合归结为陆续添加单个元素, 而添加任意集合可以视为添加若干有限集合的并集, 化为陆续添加有限集合, 于是, 扩域的问题就可变为添加单个元素的问题了.

定义4 添加一个元素 a 于域 F 所得的扩域 $F(a)$ 称为域 F 的一个单扩域(扩张).

现在, 研究有限扩域.

引理1 假定域 E 是域 F 的一个扩域, 则, 对于 $k \in F$ 及 $a \in E$, 有 $ka \in E$, 称为 E 的“数量乘法”, 从而, 对于 E 的加法及 E 的“数量乘法”而言, E 作成 F 上的一个线性空间. E 作为 F 上的线性空间, 或者是有限维的, 或者是无限维的.

定义5 设 E 是域 F 的扩域. 若 E 作为 F 上的线性空间是有限维的, 则称 E 是 F 的一个有限扩域, E 关于 F 的维数称为扩域 E 在 F 上的次数, 记作 $(E:F)$; 若 E 作为 F 上的线性空间是无限维的, 则称 E 是 F 的一个无限扩域.

例1 域 F 是 F 自身的有限扩域, $(F:F) = 1$.

定理3 若域 I 是域 F 的有限扩域, 而域 E 是 I 的有限扩域, 则 E 是 F 的有限扩域, 而且 $(E:F) = (E:I)(I:F)$.

证明 设 $(I:F) = r$, $(E:I) = s$, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 I 在 F 上的一组基, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是 E 在 I 上的一组基, 则 E 的 rs 个元素 $\alpha_i \beta_j$ ($i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s$) 是 E 在 F 上的一组基. 事实上,

1) 对于任意的 $\omega \in E$, 由 β_j 是 E 在 I 上的一组基得 $\omega = \sum_{j=1}^s \theta_j \beta_j, \theta_j \in I, j = 1,$

$2, \dots, s$. 又由 α_i 是 I 在 F 上的一组基得, $\theta_j = \sum_{i=1}^r c_{ij} \alpha_i, c_{ij} \in F, i = 1, 2, \dots, r, j =$

$1, 2, \dots, s$. 从而 $\omega = \sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=1}^r c_{ij} \alpha_i \right) \beta_j = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_{ij} (\alpha_i \beta_j)$, 即 ω 可由 $\alpha_i \beta_j$

线性表出.

2) 对于 $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s a_{ij} (\alpha_i \beta_j) = 0, a_{ij} \in F$, 有 $\sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=1}^r a_{ij} \alpha_i \right) \beta_j = 0$,

$\sum_{i=1}^r a_{ij} \alpha_i \in I$. 而 β_j 在 I 上线性无关, 所以 $\sum_{i=1}^r a_{ij} \alpha_i = 0, j = 1, 2, \dots, s$. 又 α_i 在 F 上

线性无关, 所以 $a_{ij} = 0 (i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s)$. 因此, $\alpha_i \beta_j$ 在 F 上线性无关.

于是, E 是 F 上的 rs 维线性空间, 所以, $(E:F) = (E:I)(I:F)$. 证完.

实际上, 定理 3 可以进一步推广为: 若 F_1, F_2, \dots, F_t 是域, 且后一个依次是前一个的有限扩域, 则 F_t 是 F_1 的有限扩域, 且

$$(F_t:F_1) = (F_t:F_{t-1})(F_{t-1}:F_{t-2}) \cdots (F_2:F_1).$$

定理 4 设 I 是 F 的扩域, E 是 I 的扩域. 若 E 是 F 的有限扩域, 则 E 是 I 的有限扩域, I 是 F 的有限扩域, 且 $(I:F), (E:I)$ 均整除 $(E:F)$.

证明 1) 设 $(E:F) = n$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 E 在 F 上的一组基, 则由 $F \subseteq I$ 知, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 E 在 I 上的一组生成元素, 从而 $E = I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $(E:I) \leq n$, E 是 I 的有限扩域. 又由 $I \subseteq E$ 及 I 是 F 的扩域知, I 是 E 的子空间, 从而 I 是有限维的.

2) 由定理 3 知, $(E:F) = (E:I)(I:F)$, 从而, $(E:I), (I:F)$ 均整除 $(E:F)$. 证完.

现在, 研究代数单扩域.

定义 6 设 E 是域 F 的扩域, $\alpha \in E$. 若有不全为零的 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in F$, 使 $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n = 0$, 即 α 适合 $F[x]$ 中的一个非零多项式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 则称 α 是 F 上的一个代数元素. 否则, 称 α 是 F 上的一个超越元素.

为了研究代数单扩域的结构, 引入

定义 7 设 α 是域 F 上的一个代数元素, $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 是 $F[x]$ 中的以 α 为根的且次数最小的多项式, 则称 $p(x)$ 是 α 的一个极小多项式, 称 n 是 α 在 F 上的次数, 称 α 是 F 上的 n 次代数元素.

关于极小多项式的性质, 有下面的

定理 5 设 α 是域 F 上的代数元素, 则: 1) α 的极小多项式是存在的; 2) 若 $p(x)$ 是 α 的一个极小多项式, $f(x) \in F[x]$, 且 $f(\alpha) = 0$, 则 $p(x) \mid f(x)$; 3) α 的极小多项式是唯一的; 4) $F[x]$ 中的首项系数为 1 的多项式 $p(x)$ 是 α 的极小多项式 $\Leftrightarrow p(x)$ 是 $F[x]$ 中以 α 为根的不可约多项式.

证明 1) 由 α 是 F 上的代数元素知, $F[x]$ 中有非零多项式以 α 为根, 从而这些多项式中一定有次数最小的, 设 $p(x)$ 就是其中的一个, 且不妨设 $p(x)$ 的首项系数为 1, 由定义 7, $p(x)$ 即为 α 的极小多项式.

2) 对于 $f(x) \in F[x]$, 由带余除法得 $f(x) = q(x)p(x) + r(x)$, $r(x) = 0$ 或 $\deg(r(x)) < \deg(p(x))$. 由 $f(\alpha) = 0, p(\alpha) = 0$ 得 $r(\alpha) = 0$, 从而, 当 $r(x) \neq 0$ 时, 将与 $p(x)$ 是 α 的极小多项式相矛盾, 所以 $r(x) = 0$, $p(x) \mid f(x)$.

3) 设 $p(x), p_1(x)$ 均为 α 的极小多项式, 则由 2) 得, $p(x) \mid p_1(x)$, $p_1(x) \mid p(x)$, 从而 $p(x) = cp_1(x)$, $c \in F$, 但 $p(x), p_1(x)$ 的首项系数均为 1, 所以

$c=1$, $p(x)=p_1(x)$, 即 α 的极小多项式是唯一的.

4) \Rightarrow . 用反证法. 设 α 的极小多项式 $p(x)$ 在 $F[x]$ 中可约, 则 $p(x)=p_2(x)p_3(x)$, 且 $0 < \deg(p_2(x)) < \deg(p(x))$, $0 < \deg(p_3(x)) < \deg(p(x))$, 从而 $p(\alpha)=p_2(\alpha)p_3(\alpha)=0$. 由于域中没有零因子, 所以 $p_2(\alpha)=0$ 或 $p_3(\alpha)=0$, 引出矛盾. 因此, $p(x)$ 不可约.

\Leftarrow . 设 $p_1(x)$ 是 α 的极小多项式, 由于 $p(\alpha)=0$, 所以由2)得 $p_1(x) \mid p(x)$. 由于 $p(x)$ 不可约且 $p(x)$, $p_1(x)$ 的首项系数均为1, 所以 $p_1(x)=p(x)$. 证完.

关于代数单扩域的结构, 有下面的

定理6 设 α 是 F 的 n 次代数元素, 则: 1) $F(\alpha)$ 中的任一元素都可以唯一地写成 F 上的 α 的“ $n-1$ 次”多项式; 2) $F(\alpha)=F[\alpha]_{n-1}=\{a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1} \mid a_i \in F\}$; 3) $F(\alpha)$ 是 F 的有限扩域, 且 $(F(\alpha):F)=n$.

证明 设 α 的极小多项式为 $p(x)$, 则 $\deg(p(x))=n$.

1) 对于任意 $\beta \in F(\alpha)$, 由定理1知, $\beta=f(\alpha)/g(\alpha)$, 且 $g(\alpha) \neq 0$, $f(x), g(x) \in F[x]$. 由于 $g(\alpha) \neq 0$, 所以 $p(x) \nmid g(x)$. 由定理5, $p(x)$ 在 $F[x]$ 中不可约, 所以 $(p(x), g(x))=1$, 从而, 存在 $u(x), v(x) \in F[x]$, 使 $u(x)p(x)+v(x)g(x)=1$. 由于 $p(\alpha)=0$, 所以 $v(\alpha)g(\alpha)=1$, 从而 $\beta=f(\alpha)/g(\alpha)=v(\alpha)f(\alpha)/v(\alpha)g(\alpha)=v(\alpha)f(\alpha)=h(\alpha)$, 其中 $h(x)=f(x)v(x)$.

设 $h(x)=p(x)q(x)+r(x)$, $r(x)=0$ 或 $\deg(r(x)) < \deg(p(x))$, 则 $h(\alpha)=p(\alpha)q(\alpha)+r(\alpha)=r(\alpha)$. 若记 $r(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$, 则 $\beta=h(\alpha)=r(\alpha)=a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$, 表示为 F 上的 α 的“ $n-1$ 次”多项式.

再证表示的唯一性. 设还有 $\beta=a_0'+a_1'\alpha+\cdots+a_{n-1}'\alpha^{n-1}$, $a_0', a_1', \dots, a_{n-1}' \in F$, 则 $(a_0-a_0')+(a_1-a_1')\alpha+\cdots+(a_{n-1}-a_{n-1}')\alpha^{n-1}=0$. 从而 α 是 $F[x]$ 中的多项式 $k(x)=(a_0-a_0')+(a_1-a_1')x+\cdots+(a_{n-1}-a_{n-1}')x^{n-1}$ 的根, 由定理5知 $p(x) \mid k(x)$, 当 $k(x) \neq 0$ 时就引出矛盾, 所以 $k(x)=0$, 即 $a_0=a_0', a_1=a_1', \dots, a_{n-1}=a_{n-1}'$.

2) 由1)知, $F(\alpha) \subseteq F[\alpha]_{n-1}$, 又, 显然 $F[\alpha]_{n-1} \subseteq F(\alpha)$, 所以, $F(\alpha)=F[\alpha]_{n-1}$.

3) 由1)知, $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ 是 $F(\alpha)$ 在 F 上的一组基, 所以 $(F(\alpha):F)=n$. 证完.

设 α 是域 F 上的 n 次代数元素, 则 $F(\alpha)$ 的结构如下:

1) $F(\alpha)=F[\alpha]_{n-1}$;

2) 对于任意 $l_1(\alpha), l_2(\alpha) \in F(\alpha)$, 则 $l_1(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i$, $l_2(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-1} b_i \alpha^i$,

加法 $l_1(a) + l_2(a) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) a^i$, 乘法 $l_1(a) l_2(a) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i a^i$, 其中

$$l_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, l_2(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i, l_1(x) l_2(x) = p(x) q(x) + r(x), r(x) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i, p(x) \text{ 是 } \alpha \text{ 的极小多项式.}$$

例2 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, (\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}) = 2$.

注 当 F 是域时, $F[x]$ 中的规则与 $\mathbb{F}[x]$ (\mathbb{F} 为数域) 中相同, 此处不证明了, 上面已经用到了这些规则.

最后, 我们用扩域的理论来解决尺规作图问题.

定义8 给出了若干个初等几何图形一点、直线、圆, 要求利用这些图形, 并且只能使用 (没有刻度的) 直尺和圆规, 作出满足给定条件的另外一些初等几何图形, 称为直尺圆规作图, 简称为尺规作图.

定义9 用直尺圆规作图时实施的步骤不外以下六种: 1) 在平面上任取一点; 2) 通过二给定点画一直线; 3) 以给定的一点为圆心, 以给定两点的距离为半径画一个圆; 4) 作二直线的交点; 5) 作一直线与一圆的交点; 6) 作二圆的交点. 称为直尺圆规作图的基本步骤.

容易看出, 步骤1), 4), 5), 6) 作点, 步骤2) 作直线, 步骤3) 作圆.

定义10 对于一个有某些性质的图形. 若能够给出由有限个基本步骤组成的程序, 通过这一程序, 必然得到所要求的图形, 则称该图形可用直尺圆规作出.

为了用代数方法来研究作图问题, 我们在平面上任意选取一个笛卡尔直角坐标系, 从而就有: 每个点有确定的坐标 (a, b) ; 每条直线有确定的方程 $x + cy + d = 0$ 或 $y + d' = 0$; 每个圆有确定的方程 $x^2 + y^2 + ex + fy + g = 0$, 我们限定直线与圆的方程均取这样的固定的形式, 于是图形与方程将有一一对应关系. 我们给出

定义11 点的坐标 (a, b) , 直线方程的系数 (c, d) 或 (d') , 圆的方程的系数 (e, f, g) 分别称为点、直线、圆的坐标, 统称为图形的坐标.

这样, 在取定的平面笛卡尔直角坐标系中, 用直尺圆规作出几何图形的问题, 也就是用代数方法找出一系列的点、直线、圆的坐标的问题, 即寻求某些具有某种性质的实数的问题.

定义12 平面上的笛卡尔直角坐标系中, 坐标均为有理数的点称为有理点.

引理2 若, 步骤1'): 在平面的某个区域内任取一有理点, 则基本步骤1) 或由

1')来完成,或由1'),2)、4)来完成,或由1'),2)、5)来完成.

证明 1)若在乎面的某个区域内任取一点,则由有理数的稠密性可得,平面的任一区域内均有有理点,从而1)可由1')完成.

2)若在直线上任取一点,则由1)所述,可以在该直线两边的区域内各取一有理点,再过两点作一直线,两直线相交,从而完成在直线上任取一点的工作,即由1')2)、4)完成.

3)若在圆上任取一点,则类似于2)所述,可由1'),2)、5)来完成.证完.

根据引理2,可以将1)改为1'),即,取点时均假定取有理点.

定理7 设平面上给定了若干初等几何图形.在平面上建立一笛卡尔直角坐标系,将这些给定图形在该笛卡尔直角坐标系中的坐标添加到有理数域 \mathbf{Q} 中,得到数域 \mathbf{F} ,从这些给定图形出发,施行基本步骤1)~6)中任何一种,所得图形的坐标添加到 \mathbf{F} 上得到扩域 \mathbf{E} ,则 \mathbf{E} 为有限扩域,且 $(\mathbf{E}:\mathbf{F})=1$ 或2.

证明 只需对于六种基本步骤分别讨论.

施行1).根据引理2,可以用1')代替.从而,所取的点的坐标属于 \mathbf{F} .因此,添加这些坐标于 \mathbf{F} 所得的扩域 $\mathbf{E}=\mathbf{F}$, $(\mathbf{E}:\mathbf{F})=1$.

(施行2).过给定二点 (a,b) 与 (c,d) 的直线的方程是 $x+[(c-a)/(b-d)]y+ad-bc/(b-d)=0$ (当 $b \neq d$)时或 $y-d=0$ (当 $b=d$ 时),从而 $\mathbf{E}=\mathbf{F}((c-a)/(b-d), (ad-bc)/(b-d))$ 或 $\mathbf{E}=\mathbf{F}(-d)$.因为 $a, b, c \in \mathbf{F}$,所以 $\mathbf{E}=\mathbf{F}$, $(\mathbf{E}:\mathbf{F})=1$.

施行3).以给定点 (a,b) 为圆心,以给定点 (c,d) 与 (e,f) 的距离为半径的圆的方程是 $x^2+y^2-2ax-2by+[a^2+b^2-(c-e)^2-(d-f)^2]=0$.因为 a, b, c, d, e, f 都属于 \mathbf{F} ,所以 $\mathbf{E}=\mathbf{F}(-2a, -2b, a^2+b^2-(c-e)^2-(d-f)^2)=\mathbf{F}$, $(\mathbf{E}:\mathbf{F})=1$.

施行4).求两条直线的交点,相当于解一个线性方程组,因为,方程组的系数,即所给直线的坐标,属于 \mathbf{F} ,所以,方程组的解,即交点的坐标,也属于 \mathbf{F} ,从而 $\mathbf{E}=\mathbf{F}$, $(\mathbf{E}:\mathbf{F})=1$.

施行5).求直线与圆的交点相当于解方程组

$$\begin{cases} x+cy+d=0 \\ x^2+y^2+ex+fy+g=0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} y+d'=0 \\ x^2+y^2+ex+fy+g=0. \end{cases}$$

在第一种情况下,交点的坐标是

$$(a_1, \beta_1) = ((c(v + \sqrt{v^2 - 4uw}) - 2du)/2u, (-v - \sqrt{v^2 - 4uw})/2u)$$

$$(\alpha_2, \beta_2) = ([c(v - \sqrt{v^2 - 4uw}) - 2du]/2u, (-v + \sqrt{v^2 - 4uw})/2u)$$

其中 $u = 1 + c^2$, $v = 2cd - ce + f$, $w = d^2 - de + g$. 因为 c, d, e, f, g 都属于 F , 所以 u, v, w 也属于 F , 从而 $E = F(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = F(\sqrt{v^2 - 4uw})$. 由定理 6 可知, E 是有限扩域, 且 $(E:F) = 2$ 或 1 . 在第二种情况下, 交点的坐标是

$$([-e + \sqrt{e^2 - 4(d' - fd' + g)}]/2, -d'), (-[e + \sqrt{e^2 - 4(d' - fd' + g)}]/2, -d').$$

从而, $E = F(\sqrt{e^2 - 4(d' - fd' + g)})$. 由定理 6 可知, E 是有限扩域, 且 $(E:F) = 2$ 或 1 .

施行 6). 求两圆的交点相当于解方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + e_1x + f_1y + g_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + e_2x + f_2y + g_2 = 0. \end{cases}$$

因为两圆相交, 所以有 $e_1 \neq e_2$ 或 $f_1 \neq f_2$. 从而相当于解方程组

$$\begin{cases} x + [(f_1 - f_2)/(e_1 - e_2)]y + (g_1 - g_2)/(e_1 - e_2) = 0 \\ x^2 + y^2 + e_2x + f_2y + g_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{或} \quad \begin{cases} y + (g_1 - g_2)/(f_1 - f_2) = 0 \\ x^2 + y^2 + e_2x + f_2y + g_2 = 0, \end{cases}$$

这就归结为上面的施行 5) 的情况, 从而成立.

综上所述, 定理成立. 证完.

定理 8 设平面上给定了若干初等几何图形. 在平面上建立某一笛卡尔直角坐标系, 将这些给定图形在该笛卡尔直角坐标系中的坐标添加到有理数域 Q , 得数域 F . 若满足某些条件的一个图形可以用直尺圆规作出, 则该图形作出后, 它在该笛卡尔直角坐标系中的任意坐标 α 添加于 F 所得的单扩域 $F(\alpha)$ 是 F 的有限扩域, 且 $(F(\alpha):F) = 2^s$, 其中 s 为一非负整数.

证明 按照定义 10, 所要的图形可以通过有限步实行 1) — 6) 而得出, 设一共进行了 k 步, α 为所得图形的任一坐标. 把第 i 步所得的图形称为第 i 个图形, $i = 1, 2, \dots, k$. F_i 表示把前 i 个所得图形的坐标都添加于 F 所得的扩域. 从而, F_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, k-1$) 就是把第 $i+1$ 个图形的坐标添加于 F_i 所得的扩域. 由定理 7, $(F_{i+1}:F_i) = 2^{m_i+1}$, $m_i+1 = 0$ 或 1 , $i = 1, 2, \dots, k-1$, $(F_1:F) = 2^{m_1+1}$, $m_1 = 0$ 或 1 . 从而, 由定理 3 得

$$(F_k:F) = (F_k:F_{k-1})(F_{k-1}:F_{k-2}) \cdots (F_1:F) = 2^m,$$

其中 m 为非负整数. 但是, $F(\alpha)$ 是 F_k 的子域, 又是 F 的扩域, 所以, 由定理 4 得, $(F(\alpha):F) = 2^s$, s 为非负整数. 证完.

定理 8 给出的是可以用直尺圆规作图的必要条件, 因此, 用这个定理就可以判定关于一些图形不可能用直尺圆规作出的问题. 下面是这个定理的一个应用, 证明所谓

初等几何三大问题是不能用直尺圆规作出的。该问题是一个古老的问题，曾经吸引了许多数学家，而在扩域的理论建立之前，长时间未得解决。

实际上，定理8的条件也是充分的，从略。

定义13 所谓初等几何三大问题，是指：1)三等分角：任意角都可以三等分；2)立方倍积：给定一个立方体，求作另一个立方体，使它的体积是前者的二倍；3)化圆为方：给定一个圆，求作一个正方形，使它的面积等于圆的面积。

定理9 初等几何三大问题都是不能用直尺圆规作出的。

证明 1)设可以用直尺圆规三等分任意角，则必可以用直尺圆规三等分 60° 角如图1所示， $\angle AOB=60^\circ$ ，在OB上取点D，以O为原点，以OB为 x 轴，以OD为单位长，建立笛卡尔直角坐标系，则已知图形如下： $O(0,0)$ ； $D(1,0)$ ；OB： $y=0$ ；OA： $x-\sqrt{3}y=0$ 。将它们的坐标添加于有理数域 \mathbf{Q} ，得 $F=\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ 。由定理6知， $(F:\mathbf{Q})=2$ 。

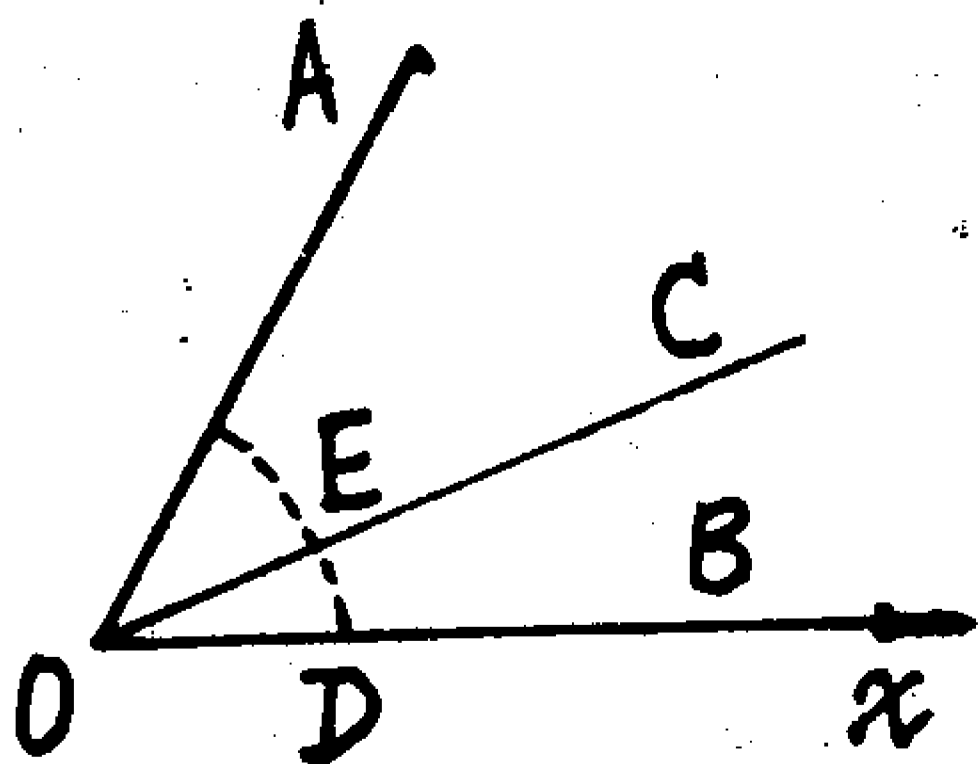


图1

假定用直尺圆规作出了OC，使 $\angle COB=20^\circ$ ，以O为圆心以OD为半径作圆，交OC于E，设E点的横坐标为 α ，则 $\alpha=\cos 20^\circ$ 。由定理8知， $(F(\alpha):\mathbf{Q})=2^{s+1}$ 。

由三角公式得， $4\alpha^3-3\alpha=4(\cos 20^\circ)^3-3\cos 20^\circ=\cos 60^\circ=1/2$ ，所以， α 是 $\mathbf{Q}[x]$ 中的多项式 $8x^3-6x-1$ 的一个根，容易证明该多项式在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约，从而由定理5与定理6得 $(\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q})=3$ 。

但是，由定理4得， $(\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q}) \mid (F(\alpha):\mathbf{Q})$ ，即 $3 \mid 2^{s+1}$ ，引出矛盾。这就证明了，直尺圆规三等分任意角是不可能的。

2)实际上，问题可以归结为：给定了一条线段AB(即给定了两点A, B)，求作一线段，使该线段等于 $\sqrt[3]{2}AB$ 。

假定用直尺圆规作出了 $AE=\sqrt[3]{2}AB$ ，以A为原点，以AB为 x 轴，以AB的长为单位长，建立笛卡尔直角坐标系，则已知图形如下： $A(0,0)$ ； $B(1,0)$ 。将它们的坐标添加于 \mathbf{Q} 得 F ，则 $F=\mathbf{Q}$ 。而点 $E(\sqrt[3]{2},0)$ 。如图2。

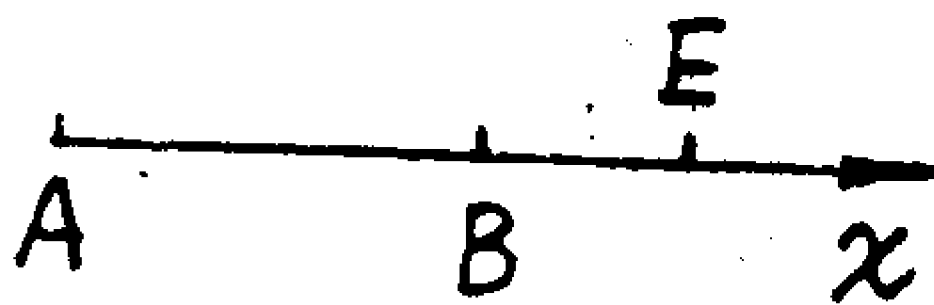


图2

因为， $\sqrt[3]{2}$ 是 $\mathbf{Q}[x]$ 中的不可约多项式 x^3-2 的一个根，所以，由定理5与定理

6 得, $(F(\sqrt[3]{2}):F) = (F(\sqrt[3]{2}):Q) = 3$, 但是, 由定理 8 得 $(F(\sqrt[3]{2}):F) = (F(\sqrt[3]{2}):Q) = 2^s$, s 为一非负整数, 从而引出矛盾. 这就证明了, 立方倍积问题用直尺圆规作出是不可能的.

3) 如图 3 所示, 已知圆 O , 以 O 为原点, 过 O 作直线 OC 为 x 轴, 且设 C 在圆 O 上, 以圆 O 的半径为单位长, 建立笛卡尔直角坐标系, 则已知图形如下: $O(0,0)$; $C(1,0)$; 圆 $O: x^2 + y^2 - 1 = 0$. 将它们的坐标添加于 Q 得 $F, F=Q$.

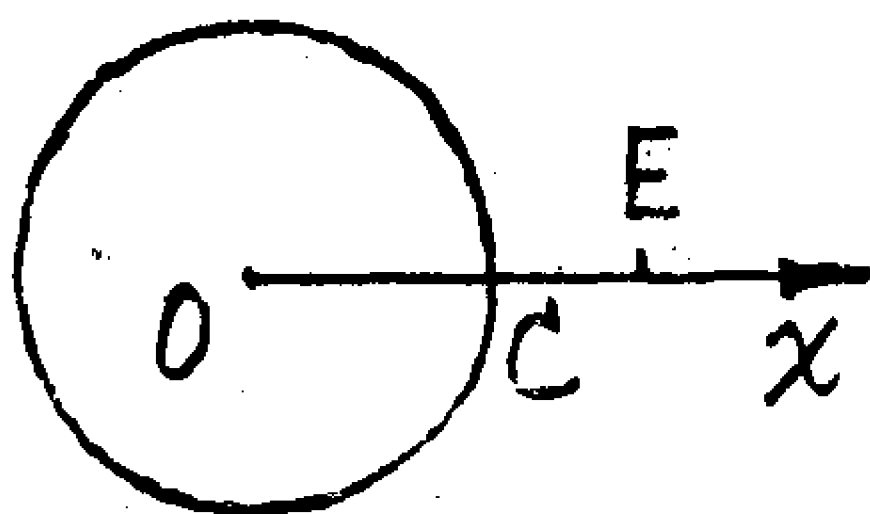


图 3

假定用直尺圆规作出了等于圆 O 面积的正方形, 且不妨设 OE 为该正方形的一边, 则 E 点的横坐标 $\alpha = \sqrt{\pi}$. 由定理 8 知, $(F(\alpha):F) = (Q(\alpha):Q) = 2^s$, s 是一非负整数. 熟知, π 是无理数, 所以 $\alpha \notin Q$, 从而, $s \geq 1$. 于是, $1, \pi = \alpha^2, \pi^2, \dots, \pi^{2^s}$ 均属于 $Q(\alpha)$, 且在 Q 上线性相关, 所以, 有一组不全为零的有理数 a_0, a_1, \dots, a_{2^s} , 使 $a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots + a_{2^s}\pi^{2^s} = 0$, 从而, π 是一个代数数. 但是, 熟知, π 是一个超越数, 引出矛盾, 这就证明了, 化圆为方问题用直尺圆规作出是不可能的.

综上所述, 定理成立. 证完.

研究一个具体例子.

例 3 设直线上给定两点 A 与 B , 则不可能用直尺圆规在 AB 间作一点 C , 在 CB 间作一点 D , 使 $AC/CD = CD/DB = DB/AB$.

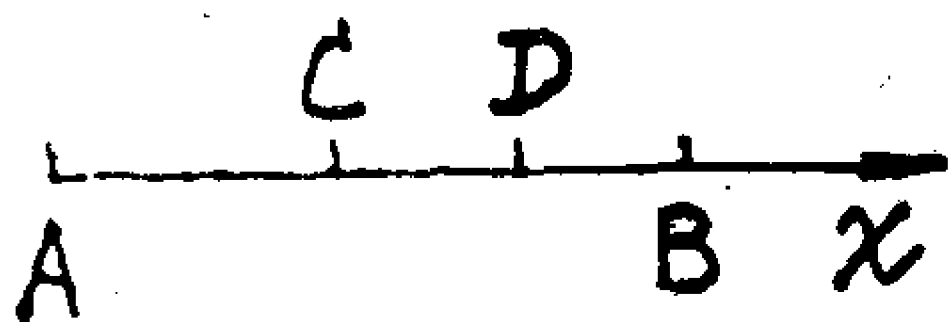


图 4

证明 用反证法. 假定可以用直尺圆规作出, 则如图 4 所示, 以 A 为原点, 以 AB 为 x 轴, 以 AB 之长为单位长, 建立笛卡尔直角坐标系, 已知图形如下: $A(0,0)$; $B(1,0)$. 将它们的坐标添加于 Q 得 $F, F=Q$.

设 D 点坐标为 $(\alpha, 0)$, 则 DB 之长为 $1-\alpha$. 由 $AC/CD = CD/DB$ 得, $CD^2 = AC \cdot DB$; 由 $CD/DB = DB/AB$ 得, $DB^2 = CD \cdot AB$; 从而, $CD = DB^2, AC = DB^3$. 由 $DB = 1-\alpha$ 得, $CD = (1-\alpha)^2, AC = (1-\alpha)^3$, 又 $AC = AB - CD - DB = 1 - (1-\alpha)^2 - (1-\alpha)$, 所以 $(1-\alpha)^3 = 1 - (1-\alpha)^2 - (1-\alpha)$, 即 $\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha - 2 = 0$, α 是 $Q[x]$ 中多项式 $x^3 - 4x^2 + 6x - 2$ 的一个根, 容易证明该多项式在 $Q[x]$ 中不可约, 从而, $(Q(\alpha):Q) = 3$, 但是, $(F(\alpha):F) = (Q(\alpha):Q) = 2^s$, 引出矛盾. 因此, 不能用直尺圆规作出.

参 考 文 献

- [1] 熊全淹, 近世代数, 上海科学技术出版社, 1978.
- [2] 张禾瑞与郝炳新, 高等代数, 人民教育出版社, 1960.

(孙宗明)

附录二 关于分母有理化问题

熟知，经过简单的变形，可以将分母中的根号去掉，如

$$\begin{aligned}\sqrt{3}/(2-\sqrt{3}) &= \sqrt{3}(2+\sqrt{3})/(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 3+2\sqrt{3}; \\ 1/({}^3\sqrt{4}+{}^3\sqrt{2}+1) &= 1/(({}^3\sqrt{2})^2+{}^3\sqrt{2}+1) \\ &= ({}^3\sqrt{2}-1)/({}^3\sqrt{2}-1)(({}^3\sqrt{2})^2+{}^3\sqrt{2}+1) = {}^3\sqrt{2}-1.\end{aligned}$$

这一工作称为分母有理化。

下面，我们将这一问题一般化，回答解决的可能性问题，并给出解答的一般程序。这一问题的一般提法如下：

\mathbb{Q} 表示有理数域， $a \in \mathbb{Q}$ ， m 是一个正整数， $\sqrt[m]{a} \notin \mathbb{Q}$ ，对于式子 $g(\sqrt[m]{a})/f(\sqrt[m]{a})$ ， $f(\sqrt[m]{a})$ ， $g(\sqrt[m]{a})$ 是关于 $\sqrt[m]{a}$ 的有理系数的多项式，且 $f(\sqrt[m]{a})$ 确实含有根号，能否将分母中的根号去掉？按照什么步骤去掉根号？回答是肯定的：能够将分母中的根号去掉。

由于 $\sqrt[m]{a}$ 适合 $\mathbb{Q}[x]$ 中的多项式 $x^m - a$ ，所以 $\sqrt[m]{a}$ 是 \mathbb{Q} 上的代数元素，从而存在 $\sqrt[m]{a}$ 的极小多项式 $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 。设 $p(x)$ 是 n 次的，则 $\sqrt[m]{a}$ 是 \mathbb{Q} 上的 n 次代数元素。为简单，记 $\alpha = \sqrt[m]{a}$ ，则由代数单扩域的知识得，

$\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha)^{n-1} = \{b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1} | b_i \in \mathbb{Q}\}$ ，从而 $g(\sqrt[m]{a})/f(\sqrt[m]{a})$ 可以写为 $\sqrt[m]{a}$ 的“ $n-1$ 次”有理系数多项式，因此，可以将分母中的根号去掉。

为了给出分母有理化的一般程序，先作些准备。

命题 1 设 $a \in \mathbb{Q}$ ， m 为正整数， $\sqrt[m]{a} \notin \mathbb{Q}$ ，则有正整数 $n > 1$ ， $N > 1$ ，有 $b \in \mathbb{Q}$ ，使 $\sqrt[m]{a} = b\sqrt[n]{N}$ 或 $b\sqrt[n]{Ni}$ ，且 N 满足条件： $N = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_t^{l_t}$ 为标准分解式， $l_j < n$ ， $j = 1, 2, \dots, t$ ， $(l_1, l_2, \dots, l_t, n) = 1$ 。

证明 按照熟知的根式化简的步骤，即可得到，从略，证完。

由命题 1 知，前面所提出的问题转化为：将 $g(\beta)/f(\beta)$ 的分母中的根号去掉，其中 $\beta = \sqrt[n]{N}$ 或 $\sqrt[n]{Ni}$ 。下面还将看到， $\sqrt[n]{Ni}$ 的情况转化为 $\sqrt[n]{N}$ 的情况。

由代数单扩域的知识可知，解答问题的关键步骤，首先是找出 β 所适合的 $\mathbb{Q}[x]$ 中的不可约多项式。为此，引入

定义 设 n, M 为正整数， $\gamma = \sqrt[n]{M} \notin \mathbb{Q}$ ，使 $\gamma^k \in \mathbb{Q}$ 的最小正整数 k ，称为无理数 γ 对于 \mathbb{Q} 的次数。

例1 $\sqrt[4]{4}$ 对于 \mathbb{Q} 的次数为 2.

我们将证明 $\beta = \sqrt[n]{N}$ 对于 \mathbb{Q} 的次数为 n .

命题2 设 n, N 为正整数, 则 $\sqrt[n]{N}$ 为整数或无理数.

证明 从略. 证完.

命题3 设 n 为正整数, p_1, p_2, \dots, p_t 为互异素数, l_j 为正整数, 且 $l_j < n$, $j = 1, 2, \dots, t$, 则 $\sqrt[n]{p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_t^{l_t}}$ 为无理数.

证明 由命题2, 并用反证法, 易证得. 证完.

命题4 设 n, N 为正整数, $N = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_t^{l_t}$ 为 N 的标准分解式, $l_j < n$, $j = 1, 2, \dots, t$, 并且, $(l_1, l_2, \dots, l_t, n) = 1$; 则 $\beta = \sqrt[n]{N}$ 对 \mathbb{Q} 的次数为 n .

证明 设 $\beta = \sqrt[n]{N}$ 对于 \mathbb{Q} 的次数为 k , 则容易证明 $k \mid n$, 从略. 下面证明 $n \mid k$. 由 $(l_1, l_2, \dots, l_t, n) = 1$ 知, 存在整数 u_1, u_2, \dots, u_t 及 v , 使 $u_1 l_1 + u_2 l_2 + \dots + u_t l_t + vn = 1$, 从而 $u_1 k l_1 + u_2 k l_2 + \dots + u_t k l_t + vkn = k$. 另外, 由 $\beta \in \mathbb{Q}$ 容易证 $\beta + \dots + \beta^{k-1} = 0$, 从而 $\beta^k \in \mathbb{Q}$. 容易证 $\beta^k = p_1^{kl_1/n} p_2^{kl_2/n} \dots p_t^{kl_t/n}$ 为整数, 再由 p_1, p_2, \dots, p_t 互异知, $n \mid kl_j$, $j = 1, 2, \dots, t$. 否则, 由命题3可证 β^k 为无理数, 导致矛盾. 于是, $n \mid (u_1 k l_1 + u_2 k l_2 + \dots + u_t k l_t + vkn)$, $n \mid k$. 因此, $k = n$, 即, $\beta = \sqrt[n]{N}$ 对于 \mathbb{Q} 的次数为 n . 证完.

定理1 命题4中的 $\beta = \sqrt[n]{N}$ 所适合的 $\mathbb{Q}[x]$ 中的不可约多项式之一是 $x^n - N$.

证明 设 ε 为 n 次本原单位根, 则 $x^n - N$ 在 $\mathbb{C}[x]$ 中分解为 $(x^n - N) = (x - \sqrt[n]{N})(x - \sqrt[n]{N}\varepsilon) \dots (x - \sqrt[n]{N}\varepsilon^{n-1})$. 设 $x^n - N$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中可约, 则 $x^n - N = h_1(x)h_2(x)$, 其中 $h_1(x), h_2(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 且 $1 \leq \deg(h_1(x))$, $\deg(h_2(x)) \leq n$. 由因式分解定理得, $h_1(x), h_2(x)$ 在 $\mathbb{C}[x]$ 中均写为一些 $x - \sqrt[n]{N}\varepsilon^i$ 因式的乘积. 从而, 其常数项就应为 $(\sqrt[n]{N})^w \varepsilon^t$, $w < n$. 由命题4, $(\sqrt[n]{N})^w$ 是无理数, 又 ε^t 等于 1 或某一非实的复数, 所以, $(\sqrt[n]{N})^w \varepsilon^t \notin \mathbb{Q}$, 引出矛盾. 因此, $x^n - N$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约. 证完.

下面给出分母有理化的一般程序.

定理2 对于 $g(\beta)/f(\beta)$, $\beta = \sqrt[n]{N}$ 或 $\sqrt[n]{Ni}$, $\sqrt[n]{N}$ 如定理1中所述, 按下列程序进行分母有理化:

1) 当 $\beta = \sqrt[n]{N}$ 时,

第一步, 求出 $u(x), v(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 使 $f(x)u(x) + (x^n - N)v(x) = d, d \in \mathbb{Q}$. 从而 $f(\beta)u(\beta) = d$, 称 $u(\beta)$ 为有理化因式;

第二步, 进行变形

$$g(\beta)/f(\beta) = g(\beta)u(\beta)/f(\beta)u(\beta) = d^{-1}g(\beta)u(\beta)$$

2) 当 $\beta = \sqrt[n]{N}i$ 时,

第一步, 写 $f(\beta) = f_1(\sqrt[n]{N}) + f_2(\sqrt[n]{N})i$, 并进行变形

$$\begin{aligned} g(\beta)/f(\beta) &= g(\beta)/(f_1(\sqrt[n]{N}) + f_2(\sqrt[n]{N})i) \\ &= \frac{g(\beta)(f_1(\sqrt[n]{N}) - f_2(\sqrt[n]{N})i)}{(f_1(\sqrt[n]{N}) + f_2(\sqrt[n]{N})i) \cdot (f_1(\sqrt[n]{N}) - f_2(\sqrt[n]{N})i)} \\ &= g(\beta)(f_1(\sqrt[n]{N}) - f_2(\sqrt[n]{N})i)/((f_1(\sqrt[n]{N}))^2 + (f_2(\sqrt[n]{N}))^2), \end{aligned}$$

从而化为 1) 的情况;

第二步, 按 1) 的步骤去掉分母中的根号。

证明 1) 由定理 1 及多项式的知识可知, $x^n - N$ 是 β 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中的极小多项式, 从而再由关于单扩域的定理即得证。

2) 易知, 第一步将问题转化为 1) 的情况, 分母中已去掉 i , 自然就可以按 1) 去掉分母中的根号了。证完。

下面研究一个例子。

例 2 对于 $(\sqrt[5]{4} + 3)/(\sqrt[5]{8} - 3\sqrt[5]{2} + 1)$, 作分母有理化。

解 $\beta = \sqrt[5]{2}$, β 的极小多项式是 $x^5 - 2$, $\sqrt[5]{8} - 3\sqrt[5]{2} + 1 = (\sqrt[5]{2})^3 - 3\sqrt[5]{2} + 1$, 于是, 对于 $x^5 - 2$ 与 $x^3 - 3x + 1$, 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中作辗转相除法求得

$$x^5 - 2 = (x^3 - 3x + 1)(x^2 + 3) + (-x^2 + 9x - 5)$$

$$x^3 - 3x + 1 = (-x^2 + 9x - 5)(-x - 9) + (73x - 44),$$

$$-x^2 + 9x - 5 = (73x - 44)(-73^{-1}x + 613/5329) + 327/5329$$

$$\begin{aligned} \text{从而得到} \quad & (x^3 - 3x + 1)(-73x^4 - 44x^3 - 31x^2 - 59x - 49) \\ & + (x^5 - 2)(73x^2 + 44x - 188) = 327. \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \frac{\sqrt[5]{4} + 3}{\sqrt[5]{8} - 3\sqrt[5]{2} + 1} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt[5]{4} + 3)(-73\sqrt[5]{16} - 44\sqrt[5]{8} - 31\sqrt[5]{4} - 59\sqrt[5]{2} - 49)}{(\sqrt[5]{8} - 3\sqrt[5]{2} + 1)(-73\sqrt[5]{16} - 44\sqrt[5]{8} - 31\sqrt[5]{4} - 59\sqrt[5]{2} - 49)} \\ & = 327^{-1}(-250\sqrt[5]{16} - 191\sqrt[5]{8} - 142\sqrt[5]{4} - 323\sqrt[5]{2} - 235). \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] 熊全淹, 近世代数, 上海科学技术出版社, 1978.
- [2] 北京大学数学力学系代数与几何教研室代数小组, 高等代数, 高等教育出版社, 1978. (孙宗明).

附录三 代数方程的根式解问题

代数方程的根式解问题,促进了抽象代数学的产生及发展.为了解答这一问题,伽罗华引进群的概念,并且,把域与子域的关系转化为群与子群的关系,完成了著名的伽罗华理论.本文将简要地介绍数域上的伽罗华理论.首先,作为准备,介绍置换群的有关知识,建立可解群的概念,研究多项式的分裂域的理论;而后,建立伽罗华基本定理;最后,讨论多项式的伽罗华群,给出代数方程可以根式解的条件.

一 置换群

定义1 n 个元素的集合 A 的一个一一变换 σ (即 A 到 A 的双射)称为集合 A 的一个置换. A 的元素常称为文字, σ 称为 n 个文字的置换,简称为 n 元置换, n 个文字常以 $1, 2, \dots, n$ 表示,记为 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

定义2 若 n 元置换 σ 使 $\sigma(i_1)=i_2, \sigma(i_2)=i_3, \dots, \sigma(i_{k-1})=i_k, \sigma(i_k)=i_1$,而使其余文字不变(即文字自身变到自身),则称 σ 是一个 k -循环置换,2-循环置换称为对换,1-循环置换使 n 个文字全不变. k -循环置换 σ 记为 $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k)$,称 i_1, i_2, \dots, i_k 为其所含的文字.若两个循环置换不含有公共文字,则称这两个循环置换是不相连的.

结论1 若 $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k)$,则 $\sigma = (\sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_{k-1}) \sigma(i_k))$,
 $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k) = (i_2 i_3 \dots i_k i_1) = \dots = (i_k i_1 i_2 \dots i_{k-1})$.

证明 由定义2即得.证完.

结论2 若 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_k & j_{k+1} & \dots & j_n \\ j_1^{(1)} & \dots & j_k^{(1)} & j_{k+1} & \dots & j_n \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_k & j_{k+1} & \dots & j_n \\ j_1 & \dots & j_k & j_{k+1}^{(1)} & \dots & j_n^{(1)} \end{pmatrix}$,

则 $\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1 = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_k & j_{k+1} & \dots & j_n \\ j_1^{(1)} & \dots & j_k^{(1)} & j_{k+1}^{(1)} & \dots & j_n^{(1)} \end{pmatrix}$,从而,两个不相连的循环置换可交换.

证明 容易验证,从略.证完.

结论3 设 σ 是一个 n 元置换, a 为任一个文字, $\sigma^i(a)$ 是序列 $a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots$ 中第一个与前面的文字发生重复的文字,则 $\sigma^i(a)=a$.

证明 用反证法,若不然,设 $\sigma^i(a) \neq a$,则有 $\sigma^i(a) = \sigma^j(a), i \geq 1$,两边用 σ 的逆 σ^{-1} 作用,得到 $\sigma^{i-1}(a) = \sigma^{j-1}(a)$,从而,第一个与前面的文字发生重复的

文字不是 $\sigma^t(a)$, 引出矛盾. 因此, $\sigma^t(a)=a$. 证完.

定理 1 每个 n 元置换 σ 都可以分解为不相连的循环置换的乘积, n 个文字中的每个文字都出现于一个循环置换中; 而且, 不计因子次序时, 分解式是唯一的, 即, 若 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_w=\sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_u'$ 是 σ 的两个分解式, 则必有 $w=u$, 且适当交换因子的次序之后, 有 $\sigma_k=\sigma_k', k=1, 2, \cdots, w$.

证明 参见〔1〕, 此处从略. 证完.

定理 1 的证明同时给出了分解式的求法.

例 1 $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}=(1)(2\ 3\ 4)(5\ 6)(7)$.

结论 4 任一 n 元置换 σ 均可以写为对换之积.

证明 由定理 1, σ 可以写为循环置换之积, 而 $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)=(i_1\ i_k)(i_1\ i_{k-1})\cdots(i_1\ i_2)$, 所以得证. 证完.

定义 3 设 x_1, x_2, \cdots, x_n 是 n 个文字, $D(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\prod_{i<j}(x_i-x_j)=(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)$, σ 是一个 n 元置换, $\sigma(D(x_1, x_2, \cdots, x_n))=D(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})=\prod_{i<j}(x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)})$. 若 $\sigma(D)=D$, 则称 σ 为偶置换; 若 $\sigma(D)=-D$, 则称 σ 为奇置换.

定理 2 设 $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ 是任一个 n 元置换, 则下列三条件等价:

1) σ 是奇(偶)置换; 2) 排列 $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ 是奇(偶)排列; 3) σ 可以写为奇数(偶数)个对换之积.

证明 用循环证法.

1) \Rightarrow 2). 因为, $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ 中的每个反序使 $\sigma(D)$ 出现一个且仅出现一个负号, 所以, 由1)即得2)成立.

2) \Rightarrow 3). 对于排列 $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ 的任一个反序, 例如 $\sigma(1)$ 与 $\sigma(2)$ 构成反序, 相应地作对换 $(\sigma(1), \sigma(2))$, 直接相乘, 有 $\sigma(12)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. 设排列 $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ 的反序数为 k , 则有对换 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k$, 使得 $\sigma\delta_1\delta_2\cdots\delta_k=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$, 从而, $\sigma=\delta_k\delta_{k-1}\cdots\delta_2\delta_1$, 3)成立.

3) \Rightarrow 1). 由3), 设 σ 写为 t 个对换之积, 则 $\sigma(D)$ 中出现 t 个负号, 因为每个对换使一个且仅使一个因子中的两文字交换. 从而, 1)成立. 证完.

由定理 2 推出, 对于任一个 n 元置换 σ , 尽管写为对换乘积的方式不是唯一确定的,

但是,乘积中所含对换的个数的奇偶性是唯一确定的.

$$\begin{aligned}\text{例 2 } \sigma &= (1)(2\ 3\ 4)(5\ 6)(7) = (2\ 4)(2\ 3)(5\ 6) \\ &= (1\ 2)(2\ 3)(3\ 2)(2\ 1)(2\ 4)(2\ 3)(5\ 6).\end{aligned}$$

结论 5 所有 n 元置换的集合记为 S_n . S_n 中的奇偶置换各占一半 ($n \geq 2$). S_n 对于映射的乘法作成群. S_n 中所有偶置换的集合 A_n 作成 S_n 的子群.

证明 易证, 从略. 证完.

定义 4 群 S_n 称为 n 次对称群, S_n 的子群 A_n 称为 n 次交代群.

结论 6 设 S 是群 G 的非空子集, $\langle S \rangle = \{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_k^{\varepsilon_k} \mid k \text{ 为任意正整数, } a_i \in S, \varepsilon_i = 1 \text{ 或 } -1, i = 1, 2, \dots, k\}$, 则 $\langle S \rangle$ 作成 G 的子群.

证明 易证, 从略. 证完.

定义 5 $\langle S \rangle$ 称为由 S 生成的 G 的子群. 当 $S = \{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ 时, 记

$$\langle S \rangle = \langle c_1, c_2, \dots, c_t \rangle.$$

定理 3 1) $S_n = \langle (1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n) \rangle$;

2) $A_n = \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \dots, (1\ 2\ n) \rangle$.

证明 1) 由 $(ij) = (1i)(1j)(1i)$ 即得证.

2) 由 $(1ij) = (1j)(1i)$ 与 $(1ij) = (12j)^2(12i)(12j)$ 即得证. 证完.

关于 S_n, A_n 的正规子群, 有下面的

定理 4 1) A_1 的正规子群是 A_1 ; A_2 的正规子群是 A_2 ; A_3 的正规子群是 $\{e\}$, A_3 ; A_4 的正规子群是 $\{e\}, B_4 = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$, A_4 ; $n \geq 5$, A_n 的正规子群是 $\{e\}, A_n$.

2) S_1 的正规子群是 S_1 ; S_2 的正规子群是 $\{e\}, S_2$; S_3 的正规子群是 $\{e\}, A_3, S_3$; S_4 的正规子群是 $\{e\}, B_4, A_4, S_4$; $n \geq 5$ 时, S_n 的正规子群是 $\{e\}, A_n, S_n$.

证明 1) 对于 A_1, A_2, A_3, A_4 , 直接验证即得. $n \geq 5$ 时, A_n 的正规子群是 $\{e\}, A_n$, 这是著名的结果, 容易从其它地方找到证明, 从略.

2) 对于 S_1, S_2, S_3, S_4 , 直接验证即得. $n \geq 5$ 时, 设 H 是 S_n 的正规子群, 且 $H \neq \{e\}$, $H \neq S_n$, 则易知 $H \cap A_n$ 是 S_n 的正规子群. 由于 $H \cap A_n \subseteq A_n$, 所以易知 $H \cap A_n$ 是 A_n 的正规子群, 从而, 再由 1) 得, $H \cap A_n = A_n$ 或 $H \cap A_n = \{e\}$. 若 $H \cap A_n = \{e\}$, 则由 $H \neq \{e\}$ 知: 若 H 中含有奇置换, 则 H 中除 e 外必全为奇置换, 且对于任一奇置换 σ , 有 $\sigma^2 = e$, 从而, σ 表示为不相连的循环置换的乘积时, 必为对换之积, 否

则 $\sigma^2 \neq e$. 设 τ 为 H 中的另一奇置换, 则 $\sigma\tau = e$, $\sigma = \tau^{-1} = \tau$, 即 H 中任意两个奇置换均相等. 设 $\sigma = (ij)\dots$, 取 $\tau = (ik)$, $k \neq j$, 则直接计算得 $\tau^{-1}\sigma\tau = (kj)\dots$, 由于 H 是 S_n 的正规子群, 所以 $\tau^{-1}\sigma\tau$ 是 H 中的奇置换, 但 $\sigma \neq \tau^{-1}\sigma\tau$, 引出矛盾. 因此, 必须有 $H \cap A_n = A_n$, $A_n \subseteq H$. 再由 $|A_n| = \frac{1}{2}|S_n|$ 及 $|H| \mid |S|$ 知, $|H| = |A_n|$, $H = A_n$. 因此, S_n 的正规子群是 $\{e\}$, A_n , S_n . 证完.

二 可解群

结论 7 设 H 是群 G 的子群, M_L 是 H 的一切左陪集作成的集合, M_R 是 H 的一切右陪集作成的集合, 则存在 M_L 到 M_R 的双射.

证明 作 $f: M_L \rightarrow M_R$, 对任意 $aH \in M_L$, 使 $f(aH) = Ha^{-1}$, 则易证 f 是 M_L 到 M_R 的一个双射. 证完.

定义 6 设 H 是群 G 的子群. 若 H 的左 (右) 陪集的个数是有限数 n , 则称 n 是 H 在 G 中的指数, 记为 $n = [G:H]$.

结论 8 若 H 是群 G 的正规子群, $[G:H] = n$, 则商群 G/H 的阶是 n , 即 $|G/H| = [G:H] = n$.

证明 由商群的定义及定义 6 即得. 证完.

定义 7 设 G 是群. 若存在 G 的子群 $G_1 = G, G_2, \dots, G_s, G_{s+1} = \{e\}$, 使得:
1) $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_s \supseteq G_{s+1}$; 2) 每个 G_{i+1} 是 G_i 的正规子群, $i = 1, 2, \dots, s$; 3) 商群列 $G_1/G_2, G_2/G_3, \dots, G_s/G_{s+1}$ 中的任一个的阶都是某个素数或 1, 则称 G 是一个可解群.

定理 5 当 $1 \leq n \leq 4$ 时, S_n 是可解群; 当 $n \geq 5$ 时, S_n 不是可解群.

证明 当 $n \neq 4$ 时, 根据定理 4 与定义 7, 容易验证, 从略. 当 $n = 4$ 时, $C_4 = \{(1), (12)(34)\}$ 是 B_4 的正规子群, 从而就有 $S_4 \supset A_4 \supset B_4 \supset C_4 \supset \{e\}$ 且 $|S_4/A_4| = 2$, $|A_4/B_4| = 3$, $|B_4/C_4| = 2$, $|C_4/\{e\}| = 2$, 所以, S_4 是可解群. 证完.

三 多项式的分裂域

定义 8 设 E 是域 F 的扩域. 若 E 的任意元素都是 F 的代数元, 则称 E 是 F 的代数扩域.

注 以下的域均为数域, 有时不再写出“数”这个字. 自然, 许多结论对于一般的域也是成立的.

定理 6 数域 F 的扩域 E 是 F 的代数单扩域 $\Leftrightarrow E$ 是 F 的有限代数扩域.

证明 \Rightarrow . 设 $E = F(\alpha)$, α 在 F 上的次数是 n , 则由代数单扩域的结构定理, $(F(\alpha):F) = n$. 从而, 对于任意的 $\beta \in E$, $1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^n$ 在 F 上线性相关, 于是, 有不全为零的 $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$, 使得 $b_0 + b_1\beta + b_2\beta^2 + \dots + b_n\beta^n = 0$, 所以, β 是

F 上的代数元, 因此, E 是 F 的有限代数扩域.

⇐. 由于 E 是 F 的有限扩域, 所以 $E=F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 例如, 取 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 E 在 F 上的一组基, 即可以, 我们先证明 $n=2$ 的情况, 为方便, 写 $E=F(\beta, \gamma)$.

设 β, γ 分别为 $F[x]$ 中不可约多项式 $f(x), g(x)$ 的根. 又设 $\beta_1=\beta, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是 $f(x)$ 的所有根, $\gamma_1=\gamma, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ 是 $g(x)$ 的所有根. 对于任意的 i 及 $j \neq 1, \beta_i + x\gamma_j = \beta + x\gamma$ 在 F 中至多有一个根. 由于 F 中有无穷多个数, 所以, 有 $a \in F$, 使 $\beta_i + a\gamma_j \neq \beta + a\gamma$. 设 $\alpha = \beta + a\gamma$, 则有 $F(\beta, \gamma) = F(\alpha)$. 首先, 显然 $F(\alpha) \subseteq F(\beta, \gamma)$, 其次, 再证 $F(\beta, \gamma) \subseteq F(\alpha)$, 实际上, 只要证明了, $\gamma \in F(\alpha)$, 就有 $\beta = \alpha - a\gamma \in F(\alpha)$, 从而得证.

我们证明, $x=\gamma$ 是 $F(\alpha)[x]$ 中 $g(x)$ 与 $f(\alpha-ax)$ 的唯一的公根. 由于 $g(\gamma)=0$ 及 $f(\alpha-a\gamma)=f(\beta)=0$, 所以 γ 是公根. 当 $j \neq 1$ 时, γ_j 不是 $f(\alpha-ax)$ 的根, 否则, 由 $f(\alpha-a\gamma_j)=0$ 知, $\alpha-a\gamma_j$ 是 $f(x)$ 的根. 从而 $\alpha-a\gamma_j=\beta_i, \beta_i+a\gamma_j=\alpha$, 与 $\beta_i+a\gamma_j \neq \beta+a\gamma (j \neq 1)$ 矛盾. 这样, $g(x)$ 与 $f(\alpha-ax)$ 仅有一次公因式, 即 $x-\gamma$ 是 $g(x), f(\alpha-ax)$ 的最大公因式, 由于最大公因式不因数域的扩大而改变, 所以 $x-\gamma \in F(\alpha)[x], \gamma \in F(\alpha)$.

当 $n > 2$ 时, 用数学归纳法, 即得. 证完.

例3 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. 易证, 从略.

结论9 (代数基本定理) 任意复系数多项式必有复数根.

结论10 系数为数的 n 次多项式 $f(x)$ 在复数域 \mathbb{C} 中有且仅有 n 个根(重根按重数计算), 从而 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}[x]$ 中分解为一次因式的乘积.

证明 此为代数基本定理的推论. 证完.

定义9 设 $f(x)$ 是域 F 上的 n 次多项式, E 是 F 的扩域. 若 $f(x)$ 在 $E[x]$ 中可以分解为一次因式的乘积, $f(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$, 但是, 在 E 的任一个真子域的多项式环中都不能如此分解, 则称 E 是 $f(x)$ 的分裂域.

定理7 对于 $F[x]$ 中的任意多项式 $f(x)$, F 为数域, $\deg(f(x))=n \geq 1$, 存在唯一的分裂域 E , 且 E 是 F 的有限代数扩域.

证明 1) 由结论9, $f(x)$ 在 \mathbb{C} 中有 n 个根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 作 $E=F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 E 就是 $f(x)$ 的分裂域. 唯一性显然.

2) $E=F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 均为 F 上的代数元, 且次数均不大于 n . 从而, 由扩域的次数定理得 $(E:F) \leq n^n$. 因此, E 是 F 的有限扩域, 进而可证 E 是 F 的代数扩域. 证完.

例4 $f(x)=x^2-2 \in \mathbb{Q}[x]$ 的分裂域 $E=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

定理8 若 F, \bar{F} 是域, $F \xrightarrow{\sigma} \bar{F}$, $g(x)$ 是 $F[x]$ 中的不可约多项式, $\bar{g}(x)$ 是

$F[x]$ 中与 $g(x)$ 对应的多项式 (即系数分别是 $g(x)$ 的系数的象), α 是 $g(x)$ 在 F 的扩域中的一个根, $\bar{\alpha}$ 是 $\bar{g}(x)$ 在 \bar{F} 的扩域中的一个根, 则有 $F(\alpha)$, $\bar{F}(\bar{\alpha})$ 的同构 τ , 使得对于任意 $a \in F$, 有 $\tau(a) = \sigma(a)$, 且 $\tau(\alpha) = \bar{\alpha}$. 特别地, 当 $F = \bar{F}$, σ 是恒等映射, α, β 是 $g(x)$ 的两个根, 有 $F(\alpha) \xrightarrow{\tau} F(\beta)$, $\tau(\alpha) = \beta$, 且对于任意 $a \in F$, 有 $\tau(a) = a$; 而对于 $f(x) \in F[x]$ 的分裂域 E 的自同构 τ , 若 τ 保持 F 的元素不动, 则 τ 把 $f(x)$ 的根变为 $f(x)$ 的根.

证明 1) $\bar{g}(x)$ 是 $\bar{F}[x]$ 中的不可约多项式. 若不然, 设 $\bar{g}(x)$ 可约, 则 $\bar{g}(x) = \bar{g}_1(x) \bar{g}_2(x)$. 假定 $g_1(x), g_2(x)$ 是 $F[x]$ 中分别与 $\bar{g}_1(x), \bar{g}_2(x)$ 对应的多项式. 因为 $F \xrightarrow{\sigma} \bar{F}$, 所以 $g(x) = g_1(x)g_2(x)$, 与 $g(x)$ 是不可约多项式矛盾.

2) 根据代数单扩域的结构定理, $F(\alpha) = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i \mid a_i \in F \right\}$, $\bar{F}(\bar{\alpha}) = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i \bar{\alpha}^i \mid \bar{a}_i \in \bar{F} \right\}$. 作 $\tau: F(\alpha) \rightarrow \bar{F}(\bar{\alpha})$, $\tau\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i \bar{\alpha}^i$,

易证 $F(\alpha) \xrightarrow{\tau} \bar{F}(\bar{\alpha})$, 且 $\tau(\alpha) = \bar{\alpha}$, 其中 $\bar{a}_i = \sigma(a_i)$, 具体细节从略.

3) 由 1), 2) 可得出 $F = \bar{F}$ 的情况. 证完.

定义 10 设 E 是 F 的代数扩域, 对于 $F[x]$ 中的任意的不可约多项式 $g(x)$, 若 $g(x)$ 在 E 中有根, 则 $g(x)$ 在 $E[x]$ 中可以分解为一次因式的乘积, 那么, E 就称为 F 的正规扩域, 又称为 F 的伽罗华域.

定理 9 E 是域 F 的有限正规扩域 $\Leftrightarrow E$ 是 $F[x]$ 中的某个多项式 $f(x)$ 的分裂域.

证明 \Rightarrow . 由于 E 是 F 的有限扩域, 所以 $E = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. 设 $f_i(x)$ 是 $F[x]$ 中以 α_i 为根的不可约多项式, 则由 E 是 F 的正规扩域知, $f_i(x)$ 在 $E[x]$ 中

分解为一次因式的乘积, 从而 $f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x)$ 在 $E[x]$ 中分解为一次因式的乘

积. 因此, E 是 $f(x)$ 的分裂域.

\Leftarrow . 设 $E = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 是 $F[x]$ 中的某一个多项式 $f(x)$ 的分裂域, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 $f(x)$ 的根, 则用定理 7 知, E 是 F 的有限代数扩域. 设 $g(x)$ 是 $F[x]$ 中的任一不可约多项式, β 是 $g(x)$ 的一个根, $\beta \in E$, 设 β' 是 $g(x)$ 的另一根, 则只要证明 $\beta' \in E$.

由定理 8, 存在 σ , 使 $F(\beta) \xrightarrow{\sigma} F(\beta')$, 且对于任意的 $a \in F$, 有 $\sigma(a) = a$, 还有 $\sigma(\beta) = \beta'$. 把 $f(x)$ 看作 $F(\beta)[x]$, $F(\beta')[x]$ 中的多项式. 反复使用定理 8,

得到 τ , 使得 $F(\beta)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \xrightarrow{\tau} F(\beta')(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\tau(\alpha_i) = \alpha_i$, 且对于 $F(\beta)$ 中的任意的 b , 有 $\tau(b) = \sigma(b)$. 由于 E 是 F 的代数扩域, $\beta \in E$, 所以, β 是系数属于 F 的 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的多项式, $\beta = h(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 从而 $\beta' = \sigma(\beta) = \tau(\beta) = \tau(h(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) = h(\tau(\alpha_1), \tau(\alpha_2), \dots, \tau(\alpha_n)) \in F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 即 $\beta' \in E$. 证完.

定理 10 若数域 E 是数域 F 的有限正规扩域, $(E:F) = n$, 则 E 的保持 F 的元不动的自同构的个数是 n .

证明 由定理 9, E 是 $F[x]$ 中某个多项式的分裂域, 从而, 由定理 6, E 又是 F 的代数单扩域. 设 $E = F(\alpha)$, α 是 $F[x]$ 中的不可约多项式 $p(x)$ 的根. 由代数单扩域的结构定理知, $p(x)$ 是 n 次多项式. 易证, $p(x)$ 无重根. 设 $p(x)$ 的 n 个根为 $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 由于 E 是 F 的正规扩域, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 均在 E 中, 利用定理 8, 得出, E 的保持 F 的元素不动的自同构, 把 $p(x)$ 的根为 α 变为 $p(x)$ 的根 $\alpha_j, j = 1, 2, \dots, n$. 因此, 这样的自同构的个数是 n . 证完.

四 伽罗华基本定理

结论 11 设 E 是域, H 是 E 的自同构群的子群, $F(H) = \{f \mid f \in E, \sigma(f) = f, \forall \sigma \in H\}$, 则 $F(H)$ 是 E 的子域.

证明 显然, $0, 1 \in F(H)$, 从而 $F(H)$ 至少含两个元素. 若 f_1, f_2 是 $F(H)$ 中的任意元素, 则对于任意 $\sigma \in H$, 有 $\sigma(f_1) = f_1, \sigma(f_2) = f_2$, 从而, $\sigma(f_1 - f_2) = \sigma(f_1) - \sigma(f_2) = f_1 - f_2$, 所以, $f_1 - f_2 \in F(H)$. 当 $f_2 \neq 0$ 时, $\sigma(f_1 f_2^{-1}) = \sigma(f_1) \sigma(f_2)^{-1} = f_1 f_2^{-1}$, 所以, $f_1 f_2^{-1} \in F(H)$. 因此, $F(H)$ 是 E 的子域. 证完.

定义 11 称结论 11 中的 $F(H)$ 是子群 H 所决定的 E 的子域.

结论 12 设 E 是域, F 是 E 的子域, $G(E/F) = \{\sigma \mid \sigma \text{ 是 } E \text{ 的自同构, 且 } \sigma(f) = f, \forall f \in F\}$, 则 $G(E/F)$ 对于映射的乘法作成一群.

证明 显然, E 的恒等自同构在 $G(E/F)$ 中, 从而 $G(E/F)$ 非空. 若 σ_1, σ_2 是 $G(E/F)$ 中的任意元素, 则对于任意 $f \in F$, 有 $\sigma_1(f) = f, \sigma_2(f) = f$, 从而, $(\sigma_1 \sigma_2)(f) = \sigma_1(\sigma_2(f)) = \sigma_1(f) = f, \sigma_1^{-1}(f) = \sigma_1^{-1}(\sigma_1(f)) = (\sigma_1^{-1} \sigma_1)(f) = f$, 所以, $\sigma_1 \sigma_2, \sigma_1^{-1} \in G(E/F)$. 因此, $G(E/F)$ 作成 E 的自同构群的子群, 即 $G(E/F)$ 作成群. 证完.

定义12 结论12中的群 $G(E/F)$ 称为 E 对于 F 的伽罗华群,或称为子域 F 所决定的子群.

结论13 设 E 是域 F 的正规扩域, F_1 是 F 的扩域,且 $F \subseteq F_1 \subseteq E$. 则 E 是 F_1 的正规扩域.

证明 由于 E 是 F 的正规扩域,所以 E 是 F 的代数扩域,从而 E 是 F_1 的代数扩域. 设 $g(x)$ 是 $F_1[x]$ 中的任一个不可约多项式, $\alpha \in E$, $g(\alpha)=0$. 由 $\alpha \in E$ 知, α 是 $F[x]$ 中某一个不可约多项式 $h(x)$ 的根,即 $h(\alpha)=0$. 由于 E 是 F 的正规扩域,所以 $h(x)$ 在 $E[x]$ 中分解为一次因式的乘积. 但是, $h(x) \in F_1[x]$,又, $g(x)$ 在 $F_1[x]$ 中不可约,从而,根据代数单扩域的理论,由 $g(\alpha)=h(\alpha)=0$ 得, $g(x) \mid h(x)$. 因此, $g(x)$ 在 $E[x]$ 中分解为一次因式的乘积, E 是 F_1 的正规扩域. 证完.

定理11 (伽罗华基本定理) 若 E 是域 F 的有限正规扩域, F_1 是中间域, $F \subseteq F_1 \subseteq E$, H 是 $G(E/F)$ 的子群, 则

$$1) F(G(E/F_1)) = F_1; \quad 2) G(E/F(H)) = H;$$

$$3) |G(E/F_1)| = (E:F_1), \quad |G(E/F)| = (E:F),$$

$$[G(E/F):G(E/F_1)] = (F_1:F).$$

证明 1) 由于 $G(E/F)$ 的定义知, $F_1 \subseteq F(G(E/F_1))$,再证明, $F(G(E/F_1)) \subseteq F_1$. 若不然,则有 $\alpha \in F(G(E/F_1))$, $\alpha \notin F_1$, 从而, α 是 $F_1[x]$ 中的某一个次数 >1 的不可约多项式 $p(x)$ 的根, α' 是 $p(x)$ 的异于 α 的根. 由定理8,有 τ , 使 $F_1(\alpha) \cong F_1(\alpha')$, $\tau(\alpha) = \alpha'$, 且 τ 使 F_1 的元素不动. 由结论13, E 是 F_1 的正规扩域,从而, $\alpha' \in E$. 将 τ 延拓为 E 的自同构 σ , σ 使 F_1 的元素不动, $\sigma \in G(E/F_1)$, 而 $\sigma(\alpha) = \alpha'$, $\sigma(\alpha) \neq \alpha$, 这就与 $\alpha \in F(G(E/F_1))$ 矛盾. 因此, $F(G(E/F_1)) = F_1$.

2) 由 $F(H)$ 的定义知, $H \subseteq G(E/F(H))$. 若, 设 $H = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$, 则, 只要证明 $|G(E/F(H))| \leq k$, 就一定有 $G(E/F(H)) = H$. 又, 由定理12知, $|G(E/F(H))| = (E:F(H))$, 所以, 只要证明 $(E:F(H)) \leq k$, 就可以了. 由于 E 是 F 的有限正规扩域, 所以 $E = F(\alpha)$, 考虑多项式 $f(x) = (x - \sigma_1(\alpha))(x - \sigma_2(\alpha)) \cdots (x - \sigma_k(\alpha))$. 由群的消去律知, $\sigma_i \sigma_1, \sigma_i \sigma_2, \dots, \sigma_i \sigma_k$ 是 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ 的一个排列, 从而 $(\sigma_i \sigma_1)(\alpha), (\sigma_i \sigma_2)(\alpha), \dots, (\sigma_i \sigma_k)(\alpha)$ 是 $\sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \dots, \sigma_k(\alpha)$ 的一个排列, 又, $f(x)$ 的系数是 $\sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \dots, \sigma_k(\alpha)$ 的初等对称多项式, 所以, 对于任意的 σ_i 不动, 从而, $f(x) \in F(H)[x]$. 由于 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ 中有一个是恒等映

射, 所以 $f(\alpha) = 0$. 但是, $f(x)$ 的次数是 k , 所以, α 关于 $F(H)$ 的次数 $\leq k$. 显然, $E = F(H)(\alpha)$, 所以, $(E:F(H)) \leq k$.

3) 由定理 10 知, $|G(E/F_1)| = (E:F_1)$, $|G(E/F)| = (E:F)$. 根据扩域的次数定理, 得到, $(E:F) = (E:F_1)(F_1:F)$. 易证, $G(E/F_1)$ 是 $G(E/F)$ 的子群, 且成立 $|G(E/F)| = |G(E/F_1)| [G(E/F):G(E/F_1)]$, 所以, $[G(E/F):G(E/F_1)] = (F_1:F)$. 证完.

定理 11 建立了 E 与 F 的中间域 F_1 与群 $G(E/F)$ 的子群之间的一一对应关系. 并且, $G(E/F(G(E/F_1))) = G(E/F_1)$. 从而, 就将域的问题转化为群的问题来讨论. 这也就是伽罗华理论的基本出发点与基本思想. 因此, 常称定理 11 为伽罗华基本定理.

例 5 $E = \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{2})$, $\omega = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. 由于 $\sqrt[3]{2}$, ω 分别是 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约多项式 $x^3 - 2 = (x - \sqrt[3]{2})(x - \omega\sqrt[3]{2})(x - \omega^2\sqrt[3]{2})$, $x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^2)$ 的根, $(E:\mathbb{Q}) = 6$, 所以, $G(E/\mathbb{Q}) = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$, $\sigma(\sqrt[3]{2}) = \omega\sqrt[3]{2}$, $\sigma(\omega) = \omega$, $\tau(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$, $\tau(\omega) = \omega^2$. $G(E/\mathbb{Q})$ 的子群是 $\{e\}$, $H_1 = \{e, \sigma, \sigma^2\}$, $H_2 = \{e, \tau\}$, $H_3 = \{e, \sigma\tau\}$, $H_4 = \{e, \sigma^2\tau\}$, G ; 对应的子域分别是 E , $F_1 = \mathbb{Q}(\omega)$, $F_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $F_3 = \mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2})$, $F_4 = \mathbb{Q}(\omega^2\sqrt[3]{2})$, \mathbb{Q} .

五 多项式的伽罗华群

定义 13 设 F 是域, $f(x) \in F[x]$, E 是 $f(x)$ 的分裂域, 则称 $G(E/F)$ 是 $f(x)$ 的伽罗华群, 记为 $G(f(x))$.

定理 12 $f(x) \in F[x]$ 的伽罗华群 $G(f(x))$ 同构于某个置换群, 从而, 就说 $G(f(x))$ 是一个置换群.

证明 设 $f(x)$ 有 k 个不同的根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, 则 $f(x)$ 的分裂域 $E = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$. 由定理 8, 对于 $\sigma \in G(f(x))$, $\sigma(\alpha_i) = \alpha_{j_i}$, $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_k}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 的一个排列. 由于 E 的任一元素均表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 的多项式 $h(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, 其系数在 F 中, 所以, 该元素在 σ 之下的象为 $h(\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_k)) = h(\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_k})$, 因此, σ 与置换

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ 相互唯一决定. 若记这种 k 元置换所成的集合为 G , 则 σ 与

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的对应是 $G(f(x))$ 到 \bar{G} 的双射. 易证明, 置换的乘法是 \bar{G} 的代数运算, 且 $G(f(x)) \simeq \bar{G}$, 从而 \bar{G} 作成一个置换群. 证完.

求 $G(f(x))$ 是一个较复杂的问题, 此处从略. 下列只列出一个结果.

例6 $f(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, $G(f(x)) = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$.

定理13 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$, 其系数 a_1, a_2, \dots, a_n 是文字, 则 $G(f(x)) = S_n$.

定理13的证明较复杂, 从略. 我们可以这样理解: $f(x)$ 的 n 个根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是相互独立的, 从而, 定理12的证明所决定的置换是 n 元置换, 且根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的任一个排列都诱导出一个自同构 σ , 所以共有 $n!$ 个, 即 $G(f(x)) = S_n$.

六 代数方程可以根式解的条件

先介绍根式解的有关概念.

定义14 若 $f(x)$ 是多项式, 则称方程 $f(x) = 0$ 是代数方程.

定义15 设 $E = F(\alpha)$, α 是 $x^n - a \in F[x]$ 的根, 即 $\alpha^n \in F$, 则称 E 是 F 的根式扩域.

结论14 若 E 是 F 的根式扩域, $(E:F) = n$, 则有一系列中间域 $F_0 = F, F_1, F_2, \dots, F_{t-1}, F_t = E$, 使得 $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{t-1} \subset F_t$, $(F_{i+1}:F_i) = p_i$, p_i 是素数, $i = 0, 1, 2, \dots, t-1$.

证明 由定义15, $E = F(\alpha)$, $\alpha^n \in F$. 由于 $(E:F) = n$, 所以 $x^n - a$ ($a = \alpha^n$) 是 $F[x]$ 中的不可约多项式. 设 $n = p_1 p_2 \cdots p_t$ 是素因数分解式, $\alpha_{i+1} = \alpha^{p_{i+2} \cdots p_t}$, $F_{i+1} = F_i(\alpha_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, t-2$, $\alpha_t = \alpha$, 则 $F_0 = F$, $F_1 = F(\alpha_1)$, $F_2 = F_1(\alpha_2)$, \dots , $F_{t-1} = F_{t-2}(\alpha_{t-1})$, $F_t = F_{t-1}(\alpha_t) = F_{t-1}(\alpha) = F(\alpha) = E$. 由扩域的次数定理及 p_i 均为素数, 得出 $(F_{i+1}:F_i) = p_i$, $i = 0, 1, \dots, t-1$. 证完.

定义16 设 $f(x) \in F[x]$, E 是 $f(x)$ 的分裂域. 若有一系列中间域 F_1, F_2, \dots, F_s , 使得 $F = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_s = E$, F_{i+1} 是 F_i 的根式扩域, $i = 0, 1, 2, \dots, s-1$, 则称代数方程 $f(x) = 0$ 可以根式解.

为了给出可以根式解的条件, 再作些准备.

定理14 设 E 是 F 的有限正规扩域, F_1 是中间域, $F \subset F_1 \subset E$, 则 F_1 是 F 的正规扩域 $\Leftrightarrow G(E/F_1)$ 是 $G(E/F)$ 的正规子群.

证明 \Rightarrow . 由条件知, F_1 是 F 的有限代数扩域, 所以, 由定理6知, $F_1 = F(\alpha)$, α 是 $F[x]$ 中不可约多项式 $f(x)$ 的根. 对于 $\sigma \in G(E/F)$, 根据定理8, $\sigma(\alpha)$ 也是 $f(x)$ 的根, 由于 F_1 是 F 的正规扩域, 所以 $\sigma(\alpha) \in F_1$, 从而 $F_1 = F(\sigma(\alpha))$. 对于 $G(E/F)$ 中的任意 σ 及 $G(E/F_1)$ 中的任意 λ , 由代数单扩域的结构定理, 只要证明 $\sigma\lambda\sigma^{-1}$ 使 $\sigma(\alpha)$ 不动, 就有 $\sigma\lambda\sigma^{-1}$ 使 F_1 的元素不动. 实际上, 由 $\alpha \in F_1$ 知, $\lambda(\alpha) = \alpha$, 从而 $(\sigma\lambda\sigma^{-1})(\sigma(\alpha)) = (\sigma\lambda)((\sigma^{-1}\sigma)(\alpha)) = (\sigma\lambda)(\alpha) = \sigma(\lambda\alpha) = \sigma(\alpha)$. 因此, $\sigma\lambda\sigma^{-1} \in G(E/F_1)$, $G(E/F_1)$ 是 $G(E/F)$ 的正规子群.

\Rightarrow 设 $G(E/F_1)$ 是 $G(E/F)$ 的正规子群, 则 $G(E/F_1) = \sigma(G(E/F_1))\sigma^{-1}$, 对于任意 $\sigma \in G(E/F)$, 如上所述, $F_1 = F(\alpha)$, α 是 $F[x]$ 中不可约多项式 $f(x)$ 的根. 如能证明 $f(x)$ 的任一个根均属于 F_1 , 则 F_1 是 $f(x)$ 的分裂域, 从而, 由定理9知, F_1 是 F 的正规扩域.

实际上, 由 $G(E/F)$ 的定义及定理8, 对于任意 $\sigma \in G(E/F)$, $\sigma(\alpha)$ 均为 $f(x)$ 的根, 并且, $f(x)$ 的任一根均可写为 $\sigma(\alpha)$ 的形状. 上面已经证明, $G(E/F_1) = \sigma G(E/F_1)\sigma^{-1}$ 中的任意元素均使 $\sigma(\alpha)$ 不变, 因此, $\sigma(\alpha) \in F(G(E/F_1))$. 根据定理11, $F(G(E/F_1)) = F_1$, 所以 $\sigma(\alpha) \in F_1$. 证完.

结论15 设数域 F 含有 n 次本原单位根, E 是 F 的根式扩域, $(E:F) = n$, 则 E 是某个多项式 $x^n - a \in F[x]$ 的分裂域, 从而是正规扩域.

证明 记 $E = F(\alpha)$, $\alpha^n = a \in F$, 则 $x^n - a \in F[x]$. 设 ε 是一个 n 次本原单位根, 则 $\alpha, \varepsilon\alpha, \varepsilon^2\alpha, \dots, \varepsilon^{n-1}\alpha$ 是 $x^n - a$ 在 E 中的 n 个根, 所以 E 是 $x^n - a$ 的分裂域. 再由定理9, E 是 F 的正规扩域. 证完.

注 下面均假定 F 是含有任意次本原单位根的域, 这样不改变根式解问题的性质, 因为 F 添加本原单位根所得的扩域是根式扩域.

结论16 设 E 是 F 的正规扩域, $(E:F) = p$, p 是素数, 则 E 可以由 F 经一系列根式扩域得到.

证明 由于 $(E:F) = p$, 所以可设 $E = F(\alpha)$, α 是 $F[x]$ 中 p 次不可约多项式 $p(x)$ 的根. 如能证明 α 可以由 F 上的根式经加减乘除四则运算表出, 则结论成立.

由于 $(E:F) = p$, 所以, 由定理11知, $|G(E/F)| = p$, 从而, 易证 $G(E/F)$ 是 p 阶循环群, 记 $G(E/F) = \{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{p-1}\}$.

由于E是F的正规扩域,所以, $p(x)$ 的 p 根个 $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 均在E中, 设 e 是一个 p 次本原单位根, 考察下面的关于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 的线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_p = \gamma_0 \\ \alpha_1 + \varepsilon \alpha_2 + \varepsilon^2 \alpha_3 + \dots + \varepsilon^{p-1} \alpha_p = \gamma_1 \\ \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \varepsilon^4 \alpha_3 + \dots + \varepsilon^{2(p-1)} \alpha_p = \gamma_2 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1 + \varepsilon^{p-1} \alpha_2 + \varepsilon^{2(p-1)} \alpha_3 + \dots + \varepsilon^{(p-1)^2} \alpha_p = \gamma_{p-1}. \end{array} \right.$$

该线性方程组的系数均属于 E ，且系数行列式为一范得蒙行列式，不为零，从而，可用 ε 及 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-1}$ 用加减乘除四则运算将 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 表示出来。

由定理12, σ 是一个 p -循环置换, 记 $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ p)$. 用 σ 作用于

$\alpha_1 + \varepsilon^k \alpha_2 + \varepsilon^{2k} \alpha_3 + \dots + \varepsilon^{(p-1)k} \alpha_p$, 得到 $\alpha_2 + \varepsilon^k \alpha_3 + \varepsilon^{2k} \alpha_4 + \dots + \varepsilon^{(p-2)k} \alpha_p + \varepsilon^{(p-1)k} \alpha_1$. 由于 $\varepsilon^{(p-1)k} = \varepsilon^{pk-k} = \varepsilon^{pk} \varepsilon^{-k} = \varepsilon^{-k}$, 所以 $\alpha_2 + \varepsilon^k \alpha_3 + \varepsilon^{2k} \alpha_4 + \dots + \varepsilon^{(p-2)k} \alpha_p + \varepsilon^{(p-1)k} \alpha_1 = \gamma_k \varepsilon^{-k}$, 因此, $\sigma(\gamma_k) = \gamma_k \varepsilon^{-k}$. 由于 $(\gamma_k \varepsilon^{-k})^p = \gamma_k^p$, 所以 $\sigma(\gamma_k^p) = (\sigma(\gamma_k))^p = (\gamma_k \varepsilon^{-k})^p = \gamma_k^p$, 因此 $\gamma_k^p \in F$. 记 $\gamma_k^p = a_k$, 则 γ_k 是 a_k 的 p 次方根, 为方便, 记 $\gamma_k = \sqrt[p]{a_k}$, $k=1, 2, \dots, p-1$. 另外, 由根与系数的关系知, $\gamma_0 \in F$, 为一致起见, 记 $a_0 = \gamma_0$. 从而就有

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_p = a_0 \\ \alpha_1 + \varepsilon \alpha_2 + \varepsilon^2 \alpha_3 + \dots + \varepsilon^{p-1} \alpha_p = \sqrt[p]{a_1} \\ \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \varepsilon^4 \alpha_3 + \dots + \varepsilon^{2(p-1)} \alpha_p = \sqrt[p]{a_2} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1 + \varepsilon^{p-1} \alpha_2 + \varepsilon^{2(p-1)} \alpha_3 + \dots + \varepsilon^{(p-1)^2} \alpha_p = \sqrt[p]{a_{p-1}} \end{array} \right.$$

这样, 就得 $E = F(\alpha) = F(a_0, \sqrt[p]{a_1}, \sqrt[p]{a_2}, \dots, \sqrt[p]{a_{p-1}})$. 易知, $F \subset F(\sqrt[p]{a_1}) \subset F(\sqrt[p]{a_1})(\sqrt[p]{a_2}) \subset \dots \subset F(\sqrt[p]{a_1})(\sqrt[p]{a_2}) \dots (\sqrt[p]{a_{p-1}}) = E$. 证完.

下面给出代数方程可以根式解的条件.

定理15 设 F 是数域, $f(x) \in F[x]$, 则代数方程 $f(x)=0$ 可以根式解 $\Leftrightarrow f(x)$ 的伽罗华群 $G(f(x))$ 是可解群.

证明 \Rightarrow . 设 E 是 $f(x)$ 的分裂域, 则由条件及定义 16 知, 有 $F = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset$

$\dots \subset F_{i+1} = E$, F_{i+1} 是 F_i 的根式扩域, $i=0, 1, 2, \dots, s-1$. 由结论14, 可以假定 $(F_{i+1}:F_i) = p_i$, p_i 是素数, $i=0, 1, 2, \dots, s-1$. 由于 E 是 $f(x)$ 的分裂域, 所以, 由定理9知, E 是 F 的正规扩域, 再由结论13知, E 是 F_i 的正规扩域, 从而, 可记 $G_i = G(E/F_i)$, $i=1, 2, \dots, s-1$, $G_0 = G(f(x)) = G(E/F)$, $G_s = G(E/E) = \{e\}$. 于是得到, $\{e\} = G_s \subset G_{s-1} \subset \dots \subset G_1 \subset G_0 = G(f(x))$. 由结论15知, F_{i+1} 是 F_i 的正规扩域, $i=0, 1, 2, \dots, s-1$, 所以, 由定理14知, G_{i+1} 是 G_i 的正规子群. 根据定理11, $[G_i:G_{i+1}] = (F_{i+1}:F_i)$, 但 $(F_{i+1}:F_i) = p_i$, 所以 $|G_i/G_{i+1}| = p_i$, $i=0, 1, 2, \dots, s-1$, 因此, 由定义7知, $G_0 = (f(x))$ 是可解群.

\Leftarrow . 设 E 是 $f(x)$ 的分裂域, 由于 $G = G(f(x))$ 是可解群, 所以, 由定义7得, 存在 G 的子群 $G_0 = G, G_1, G_2, \dots, G_s = \{e\}$, 使 $G_0 = G \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_s = \{e\}$, G_{i+1} 是 G_i 的正规子群, 且 $|G_i/G_{i+1}| = p_i$, p_i 是素数, $i=0, 1, 2, \dots, s-1$.

记 $F_i = F(G_i)$, $i=0, 1, 2, \dots, s$, 则有 $F = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_s = E$. 由于 E 是 $f(x)$ 的分裂域, 所以由定理9知, E 是 F 的正规扩域. 根据定理11, $G(E/F_i) = G(E/F(G_i)) = G_i$, 由于 G_{i+1} 是 G_i 的正规子群, 所以, 由定理14知, F_{i+1} 是 F_i 的正规扩域, $i=0, 1, 2, \dots, s-1$. 根据定理11, $(F_{i+1}:F_i) = [G_i:G_{i+1}]$, $|G(F_{i+1}/F_i)| = (F_{i+1}:F_i)$, 而 $[G_i:G_{i+1}] = p_i$, 所以 $|G(F_{i+1}/F_i)| = p_i$, $G(F_{i+1}/F_i)$ 是 p_i 阶循环群, 从而, 根据结论16, F_{i+1} 是 F_i 的根式扩域, $i=0, 1, 2, \dots, s-1$. 因此, 根据定义16, $f(x)=0$ 可以根式解. 证完.

例7 $f(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. 由例6, $G(f(x)) = \{(1), (123), (132)\}$. 由定义7, $G(f(x))$ 是可解群. 再定理15, $x^3 - 3x + 1 = 0$ 可以根式解.

例8 $f(x) = x^5 + 3x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$, 可以证明 $G(f(x)) = S_5$, 从略. S_5 不是可解群, 所以由定理15得, $x^5 + 3x + 3 = 0$ 不可以根式解.

定理16 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, 其中系数 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ 是文字, 则当 $n \geq 5$ 时, n 次一般方程 $f(x) = 0$ 不可以根式解.

证明 由定理13, $G(f(x)) = S_n$; 又, 由定理5, 当 $n \geq 5$ 时, S_n 不是可解群; 再由定理15, $f(x) = 0$ 不可以根式解. 证完.

参 考 文 献

- [1] 孙宗明, n 元置换的分解, 益阳师专学报(自然科学版), 1987年第1期.
- [2] 熊全淹, 近世代数, 上海科学技术出版社, 1978.

(孙宗明)

附录四 有限维向量空间

第 I 章 空间

§ 1 域

若在由对象（纯量）组成的某个集合中定义了加法与乘法，并且条件(A),(B), (C)均满足，则称该集合（与给定的运算一起）是一个域。

§ 2 向量空间

定义，其元素被称为向量的集合 V 是向量空间，若满足下面的公理。

(A) 对于 V 中的任意一对向量 x, y ，都对应 V 中的一个向量 $x+y$ ，称为 x 与 y 的和，并且

(1) 加法是交换的， $x+y=y+x$ ，

(2) 加法是结合的， $x+(y+z)=(x+y)+z$ ，

(3) V 中存在唯一的向量 0 ，使得对于任意向量 x ， $x+0=x$ ，

(4) 对于 V 中任意向量 x ，都对应唯一的向量 $-x$ ，使得 $x+(-x)=0$ 。

(B) 对于任意一对 α 与 x ，其中 α 是一个纯量而 x 是 V 中的向量，都对应 V 中的一个向量 αx ，称为 α 与 x 的积，并且

(1) 乘法对于纯量是结合的， $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ ，

(2) 对于任意向量 x ， $1x=x$ ，

(C) (1) 乘法对于向量的加法是分配的， $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ ，

(2) 乘法对于纯量的加法是分配的， $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ 。

§ 3 例子

(3) n 维复坐标空间 \mathbf{C}^n ($n=1, 2, \dots$)，若 $x=(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 与 $y=(\eta_1, \dots, \eta_n)$ 是 \mathbf{C}^n 的元素，则

$$x+y=(\xi_1+\eta_1, \dots, \xi_n+\eta_n),$$

$$\alpha x=(\alpha\xi_1, \dots, \alpha\xi_n),$$

$$0=(0, \dots, 0),$$

$$-x=(-\xi_1, \dots, -\xi_n).$$

§ 4 注释

若纯量是环（代替域）的元素，则对应于向量空间的一般概念称为模。

§ 5 线性相关性

定义. 向量的有限集合 $\{x_i\}$ 是线性相关的, 若相应地存在不为全零的纯量的集合 $\{a_i\}$, 使得

$$\sum_i a_i x_i = 0.$$

另一方面, 若 $\sum_i a_i x_i = 0$ 得出 $a_i = 0$ 对于每个 a_i , 则集合 $\{x_i\}$ 是线性无关的.

§ 6 线性组合

当 $x = \sum_i a_i x_i$ 时, 我们将说, x 是 $\{x_i\}$ 的线性组合.

定理. 非零向量 x_1, \dots, x_n 的集合是线性相关的当且仅当某个 x_k ($2 \leq k \leq n$) 是它前面的那些向量的线性组合.

§ 7 基

定义. 向量空间 V 的一个 (线性) 基 (或坐标系) 是一线性无关向量的集合 X , 使得 V 的每个向量是 X 的元素的线性组合. 一个向量空间 V 是有限维的, 若它有一个有限基.

定理. 若 V 是一个有限维向量空间, $\{y_1, \dots, y_m\}$ 是 V 中线性无关向量的集合, 则, 除非这些 y 已经形成一个基, 我们能找到向量 y_{m+1}, \dots, y_{m+p} , 使得这些 y 的总体, 即 $\{y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+p}\}$, 是一个基. 换言之, 每个线性无关的集合都可以扩充到一个基.

§ 8 维数

定理 1. 有限维向量空间 V 的任一基的元素个数与任意其它的基是相同的.

定义. 有限维向量空间 V 的维数是 V 的一个基中元素的个数.

定理 2. n 维向量空间 V 中 $n+1$ 个向量的任意集合是线性相关的. V 中 n 个向量的集合是一个基当且仅当它是线性无关的, 或者, 当且仅当 V 中任一向量都是这个集合元素的线性组合.

§ 9 同构

定义. 两个向量空间 U 和 V (在相同的域上) 是同构的, 若有 U 的向量 x 与 V 的向量 y 之间的一一对应, $y = T(x)$, 使得

$$T(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1 T(x_1) + a_2 T(x_2).$$

定理. 域 F 上的任意 n 维向量空间 V 同构于 F^n .

§ 10 子空间

定义. 向量空间 V 的一个非空子集 M 是一个子空间, 或线性流形, 若对于包含于

M中的任意一对向量 x, y , 每个线性组合 $\alpha x + \beta y$ 也包含于M中.

§ 11 子空间的运算

定理1. 若干子空间的交是子空间.

定理2. 若S是向量空间V的向量集合, M是S生成的子空间, 则S的元素的所有线性组合作成的子集合与M是相同的.

定理3. 若K和L是任意两个子空间, M是由K和L共同生成的子空间, 则所有形如 $x+y$ 的向量作成的集合与M是相同的, 其中 x 在K中, y 在L中.

§ 12 子空间的维数

定理1. n 维向量空间V的子空间M是维数 $\leq n$ 的向量空间.

定理2. 给定 n 维向量空间V的任意 m 维子空间M, 我们可以找到V的一个基 $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$, 使得 x_1, \dots, x_m 在M中, 从而形成M的一个基.

§ 13 对偶空间

定义. 向量空间V上的一个线性函数是对于每个向量 x 都定义的一个纯量值函数 y , 具有性质 (向量 x_1 与 x_2 和纯量 α_1 与 α_2)

$$y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y(x_1) + \alpha_2 y(x_2).$$

设V是任意线性空间, V' 是V的所有线性函数的集合. 我们用0表示由 $y=0$ (对V中的任意 x)定义的线性函数, 若 y_1 与 y_2 是V上的线性函数, α_1 与 α_2 是纯量, 我们

把由

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$$

定义的函数写为 y , 容易看出, y 是一个线性函数, 我们记作 $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$. 由这些线性概念 (零, 加法, 纯量乘法) 的定义, 集合 V' 形成一个向量空间, 称为V的对偶空间.

§ 14 方括号

对于每一对 x 与 y , 其中 x 是V中的向量, y 是 V' 的元素, 我们作对应 $[x, y]$, 纯量 $[x, y]$ 定义为 y 在 x 的值.

$$[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y] = \alpha_1 [x_1, y] + \alpha_2 [x_2, y],$$

$$[x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = \alpha_1 [x, y_1] + \alpha_2 [x, y_2].$$

称 $[x, y]$ 是V中的向量 x 与 V' 中的向量 y 的双线性函数.

§ 15 对偶基

定理1. 若V是 n 维向量空间, $\{x_1, \dots, x_n\}$ 是V的一个基, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是 n 个纯量作成的任意集合, 则有且仅有V的一个线性函数, 使得 $[x_i, y] = \alpha_i, i = 1, \dots, n$.

定理2. 若 V 是 n 维向量空间, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 是 V 的一个基, 则有唯一确定的 V' 的基 $X' = \{y_1, \dots, y_n\}$, 具有性质 $[x_i, y_j] = \delta_{ij}$. 由此, n 维向量空间的对偶空间是 n 维的.

基 X' 称为 X 的对偶基.

定理3. 若 u 与 v 是 n 维向量空间 V 的任意两个不同的向量, 则存在 V 的一个线性函数 y , 使得 $[u, y] \neq [v, y]$, 或者, 等价地, 对 V 的任意非零向量 x , 都对应于 V' 中的一个 y , 使得 $[x, y] \neq 0$.

§ 16 自反性

定理. 若 V 是有限维向量空间, 则对应于 V' 上的每个线性函数 z_0 , 都存在 V 中的一个向量 x_0 , 使得对于 V' 中的每个 y , $z_0(y) = [x_0, y] = y(x_0)$; 并且, 对应 $z_0 \leftrightarrow x_0$ 是 V'' 与 V 的同构.

在这个陈述中所描述的对应称为 V'' 与 V 之间的自然对应.

§ 17 零化子

定义. 向量空间 V 的任意子集 S (S 不必是子空间)的零化子 S^0 是 V' 中所有向量 y 的集合, 使得对于 S 中的所有 x , $[x, y]$ 恒为零.

定理1. 若 M 是 n 维向量空间 V 的 m 维子空间, 则 M^0 是 V' 的 $n-m$ 维子空间.

定理2. 若 M 是有限维的向量空间 V 的子空间, 则 $M^{00} (= (M^0)^0) = M$.

§ 18 直和

定义. 若 U 与 V 是向量空间(在相同的域上), 则它们的直和是向量空间 W (记作 $U \oplus V$), 其元素是一切有序对 $\langle x, y \rangle$, x 在 U 中, y 在 V 中, 线性运算按

$$\alpha_1 \langle x_1, y_1 \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y_2 \rangle = \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle.$$

定理. 若 U 与 V 是向量空间 W 的子空间, 则下列三个条件是等价的.

(1) $W = U \oplus V$.

(2) $U \cap V = 0$ 与 $U + V = W$ (即, U 与 V 均是另一个的补).

(3) W 中的每个向量 z , 能而且只能用一种方式写为 $z = x + y$ 的形式, x 在 U 中, y 在 V 中.

§ 19 直和的维数

定理1. 直和的维数是它的被加空间的维数的和.

定理2. 若 W 是任意 $n+m$ 维向量空间, U 是 W 的任意 n 维子空间, 则存在 W 的 m 维子空间 V , 使得 $W = U \oplus V$.

§ 20 直和的对偶

定理. 若 M 与 N 是向量空间, $V = M \oplus N$, 则 M' 同构于 N^0 , N' 同构于 M^0 , 且 $V' = M^0 \oplus N^0$.

§ 21 商空间

设 M 是向量空间 V 的子空间. 若 x 是 V 中的任意向量, 我们把所有和 $x + y$ (y 在 M 中) 的集合写为 $x + M$, 每个形如 $x + M$ 的集合称为 M 的陪集.

我们的定义

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M,$$

$$\alpha(x + M) = \alpha x + M,$$

则所有陪集的集合对于上面定义的线性运算形成一个向量空间, 称为 V 的模 M 商空间, 记作 V/M .

§ 22 商空间的维数

定理 1. 若 M 与 N 是向量空间 V 的补子空间, 则指定 N 中的每个向量 y 与陪集 $y + M$ 的对应是 N 与 V/M 之间的一个同构.

定理 2. 若 M 是 n 维向量空间 V 的 m 维子空间, 则 V/M 有维数 $n - m$.

§ 23 双线性型

若 U 与 V 是向量空间 (在相同的域上), $W = U \oplus V$, w 是 W 上的函数, 在 W 的元素 $\langle x, y \rangle$ 的值将记为 $w(x, y)$.

W 上的纯量值函数 w 是一个双线性型 (或双线性函数), 若

$$w(\alpha_1 x_1 + \beta_2 x_2, y) = \alpha_1 w(x_1, y) + \alpha_2 w(x_2, y),$$

$$w(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 w(x, y_1) + \alpha_2 w(x, y_2).$$

若 w_1 与 w_2 是 W 上的两个双线性型, α_1 与 α_2 是纯量, 定义

$$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2, \quad w(x, y) = \alpha_1 w_1(x, y) + \alpha_2 w_2(x, y).$$

定理 1. 若 U 是有基 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 的 n 维向量空间, V 是有基 $\{y_1, \dots, y_m\}$ 的 m 维向量空间, $\{\alpha_{ij}\}$ 是 nm 个纯量的任意集合 ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$), 则有且仅有一个 $U \oplus V$ 上的双线性型 $w(x_i, y_j) = \alpha_{ij}$, 对所有的 i 与 j .

定理 2. 若 U 是有基 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 的 n 维向量空间, V 是有基 $\{y_1, \dots, y_m\}$ 的 m 维向量空间, 则在由 $U \oplus V$ 上的所有双线性型作成的向量空间中, 存在唯一确定的基 $\{w_{pq}\}$ ($p = 1, \dots, n; q = 1, \dots, m$), 具有性质 $w_{pq}(x_i, y_j) = \delta_{ip} \delta_{jq}$, 因此, $U \oplus V$ 上的双线性型作成的空间的维数是 U 与 V 的维数的积.

§ 24 张量积

两个向量空间 U 与 V (在相同的域上) 的张量积是, 对于 U 中的每个 x 与 V 中的每

个 y , 都对应 $U \otimes V$ 中的一个“积” $z = x \otimes y$, 并且, 对于每个固定的 y , x 与 z 间的对应, 对于每个固定的 x , y 与 z 间的对应, 都是线性的.

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2) \otimes y = a_1 (x_1 \otimes y) + a_2 (x_2 \otimes y),$$

$$x \otimes (a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1 (x \otimes y_1) + a_2 (x \otimes y_2).$$

$x \otimes y$ 定义为 x 与 y 的双线性型 (向量值) 函数.

§ 25 积的基

定义. 两个有限维的向量空间 U 与 V (在相同的域上) 的张量积 $U \otimes V$ 是 $U \oplus V$ 上的所有双线性型所作成的向量空间的对偶. 对于任意向量对 x, y , x 在 U 中, y 在 V 中, x 与 y 的张量积 $z = x \otimes y$ 是由 $z(w) = w(x, y)$ (对于每个双线性型 w) 定义的 $U \otimes V$ 中的元素.

定理. 若 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 与 $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ 分别是 U 与 V 的基, 则向量 $z_{ij} = x_i \otimes y_j$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$) 的集合 Z 是 $U \otimes V$ 的一个基.

§ 26 置换

1 与 k 之间的整数的置换是一个一一变换, 每个整数指派为另一个, 1 与 k 之间的整数的所有置换的集合作成一个群, 记为 S_k .

§ 27 循环

定理 1. 每个置换是互不相交的循环的积.

定理 2. 每个循环是对换的积.

定理 3. 每个置换是对换的积.

§ 28 奇偶性

置换 π 是偶的, 若 $\pi f = f$; 是奇的, 若 $\pi f = -f$. 每个对换都是奇的.

所有偶置换的集合是 S_k 的一个子群, 记为 A_k .

§ 29 多重线性型

设 V_1, V_2, \dots, V_k 是向量空间 (在相同的域上), 一个 k -线性型是直和 $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ 上的一个纯量值函数, 具有性质, 对于任意 $k-1$ 个变量的固定的值, 它线性地依赖于余下的一个向量.

若 w_1 与 w_2 是 k -线性型, α_1 与 α_2 是纯量, w 由

$$w(x_1, \dots, x_k) = \alpha_1 w_1(x_1, \dots, x_k) + \alpha_2 w_2(x_1, \dots, x_k)$$

定义, x_i 在 V_i 中, $i = 1, \dots, k$, 则 w 是一个 k -线性型, 记为 $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$. 所有 k -线性型对于这样定义的线性运算作成向量空间, 它的维数是积 $n_1 \cdots n_k$, n_i 是 V_i

的维数.

若 W 是一个 k -线性型, π 在 S_k 中, 我们写

$$\pi W(x_1, \dots, x_k) = W(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)}).$$

k -线性型 W 称为对称的, 若对于 S_k 中的任意置换 π , 有 $\pi W = W$.

§ 30 交错型

一个 k -线性型 W 是斜对称的, 若对于 S_k 中的所有奇置换 π , 有 $\pi W = -W$.

一个 k -线性型 W 称为交错的, 若当有两个 x 相同时, $W(x_1, \dots, x_k) = 0$.

定理 1. 任意交错多重线性型是斜对称的.

定理 2. 若 x_1, \dots, x_k 是线性相关的向量, W 是一个交错 k -线性型, 则 $W(x_1, \dots, x_k) = 0$.

定理 3. 若 W 是一个非零交错 n -线性型, x_1, \dots, x_n 是线性无关的向量, 则 $W(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

§ 31 极大次数的交错型

定理. n 维向量空间上的交错 n -线性型作成的向量空间是1维的.

第 I 章 变换

§ 32 线性变换

定义. 向量空间 V 的一个线性变换 (或算子) 是这样的一个对应 A , 它指派 V 中的每个向量 x 到 V 中的向量 Ax , 并且

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

§ 33 变换看作向量

若 A 与 B 是线性变换, 我们按等式 $Sx = Ax + Bx$ (对每个 x) 定义它们的和 $S = A + B$. 对于 A 与纯量 α , 我们按等式 $(\alpha A)x = \alpha(Ax)$ 定义乘积 αA .

定理. 一个向量空间的所有线性变换的集合自身也是一个向量空间.

§ 34 积

两个线性变换 A 与 B 的乘积 $P = AB$, 按等式 $Px = A(Bx)$ 定义.

§ 35 多项式

若 $p(t)$ 是纯量系数的变量 t 的任意多项式, $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$, 我们能够形成一个线性变换

$$p(A) = \alpha_0 1 + \alpha_1 A + \dots + \alpha_n A^n.$$

由 $p(t)q(t) = r(t)$ 推出 $p(A)q(A) = r(A)$.

§ 36 逆

可能出现这样的情况，线性变换 A 具有下面两个很特殊的性质中的一个或两个。

(1) 若 $x_1 \neq x_2$ ，则 $Ax_1 \neq Ax_2$ 。

(2) 对于任一个向量 y ，至少对应一个向量 x ，使得 $Ax = y$ 。

若 A 同时具有这些性质，则我们将说 A 是可逆的。若 A 是可逆的，则我们按下面的方式定义一个线性变换，称为 A 的逆变换，记为 A^{-1} 。若 y_0 是任意向量，我们能够找到一个向量 x_0 ，使得 $Ax_0 = y_0$ ，并且，这个 x_0 是唯一决定的，我们定义 $A^{-1}y_0$ 就是 x_0 。

定理1. 若 A, B 与 C 是线性变换，使得

$$AB = CA = 1,$$

则 A 是可逆的，并且 $A^{-1} = B = C$ 。

定理2. 有限维向量空间 V 的一个线性变换 A 是可逆的当且仅当用 $Ax = 0$ 推出 $x = 0$ ，或者，当且仅当 V 中的任意向量 y 能写为 $y = Ax$ 的形式。

定理3. 若 A 与 B 是可逆的，则 AB 是可逆的，并且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 。若 A 是可逆的， $\alpha \neq 0$ ，则 αA 是可逆的，并且 $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$ 。若 A 是可逆的，则 A^{-1} 是可逆的，并且 $(A^{-1})^{-1} = A$ 。

§ 37 矩阵

定义. 设 V 是 n 维向量空间， $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 是 V 的一个基， A 是 V 的线性变换。因为每个向量都是 x_i 的线性组合，特别地，我们有

$$Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} x_i,$$

对于 $j = 1, \dots, n$ ， n^2 个纯量 (α_{ij}) 的集合是 A 在坐标系 X 下的矩阵，一般地，我们记为 $[A]$ ：

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

§ 38 线性变换的矩阵

定理. 所有矩阵 (α_{ij}) ， (β_{ij}) 等的集合中， $i, j = 1, \dots, n$ (不考虑线性变换的关系)，我们定义和，数乘，积， (0_{ij}) ， (e_{ij}) 。

$$(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}),$$

$$a(\alpha_{ij}) = (a\alpha_{ij}),$$

$$(\alpha_{ij})(\beta_{ij}) = \left(\sum_k \alpha_{ik} \beta_{kj} \right)$$

$$0_{ij} = 0, e_{ij} = \delta_{ij}.$$

则 V 的所有线性变换 A 与所有矩阵 (α_{ij}) 之间的按 $Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} x_i$ 描述的对应 (建立于 n 维向量空间 V 的任意坐标系 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 上) 是一个同构; 换言之, 它是一个一一对应, 并保持和, 数乘, 积, 0 与 1 .

§ 39 不变性

在一个向量空间的子空间 N 与该空间的线性变换 A 之间的一个可能的关系是不变性. 我们说 N 在 A 之下是不变的, 若由 x 在 N 中推出 Ax 在 N 中.

§ 40 可约性

不变性概念的特别重要的情况是可约性.

§ 41 射影

定义. 若 V 是 M 与 N 的直和, 则 V 中的每个向量 z 唯一地写为 $z = x + y$ 的形式, x 在 M 中, y 在 N 中, M 上沿 N 的射影是由 $Ez = x$ 定义的变换.

定理 1. 一个线性变换 E 是某个子空间上的射影当且仅当它是幂等的, 即 $E^2 = E$.

定理 2. 若 E 是 M 上沿 N 的射影, 则 M 与 N 分别是方程 $Ez = z$ 与 $Ez = 0$ 的所有解的集合.

定理 3. 一个线性变换 E 是射影当且仅当 $1 - E$ 是射影; 若 E 是 M 上沿 N 的射影, 则 $1 - E$ 是 N 上沿 M 的射影.

§ 42 射影的组合

定理. 我们假定 E_1 与 E_2 分别是 M_1 与 M_2 上沿 N_1 与 N_2 的射影, 并且, 纯量的基础域满足 $1 + 1 \neq 0$. 于是, 我们得到三个断言.

(1) $E_1 + E_2$ 是射影当且仅当 $E_1 E_2 = E_2 E_1 = 0$; 若这个条件满足, 则 $E = E_1 + E_2$ 是 M 上沿 N 的射影, 其中 $M = M_1 \oplus M_2$, $N = N_1 \cap N_2$.

(2) $E_1 - E_2$ 是射影当且仅当 $E_1 E_2 = E_2 E_1 = E_2$; 若这个条件满足, 则 $E = E_1 - E_2$ 是 M 上沿 N 的射影, 其中 $M = M_1 \cap N_2$, $N = N_1 \oplus M_2$.

(3) 若 $E_1 E_2 = E_2 E_1 = E$, 则 E 是 M 上沿 N 的射影, 其中 $M = M_1 \cap M_2$, $N = N_1 + N_2$.

§ 43 射影与不变性

定理 1. 若 M 是在线性变换 A 下不变的子空间, 则对 M 上的每个射影 E , $EAE = AE$. 反之, 若对于 M 上的每个射影 E , $EAE = AE$, 则 M 在 A 下是不变的.

定理 2. 若 M 与 N 是子空间, $V = M \oplus N$, 则线性变换 A 按照对 (M, N) 可约的必要充分条件是 $EA = AE$, 其中的 E 是 M 上沿 N 的射影.

§ 44 伴随

设 V 是任意向量空间, y 是 V' 的任意元素, 对于 V 的任意线性变换 A , 考虑式子 $[Ax, y]$. 对于每个固定的 y , 由 $y'(x) = [Ax, y]$ 定义的函数 y' 是 V 上的线性函数. 我们有 $[Ax, y] = [x, y']$. 若写 $y' = A'y$, 则 A' 的定义性质是

$$(1) \quad [Ax, y] = [x, A'y],$$

A' 是 V' 的一个线性变换, 并且

$$(2) \quad 0' = 0,$$

$$(3) \quad 1' = 1,$$

$$(4) \quad (A+B)' = A' + B',$$

$$(5) \quad (\alpha A)' = \alpha A',$$

$$(6) \quad (AB)' = B'A',$$

$$(7) \quad (A^{-1})' = (A')^{-1},$$

$$(8) \quad A'' = A.$$

§ 45 射影的伴随

定理 1. 若 E 是 M 上沿 N 的射影, 则 E' 是 N^0 上沿 M^0 的射影.

定理 2. 若 M 在 A 下是不变的, 则 M^0 在 A' 下是不变的; 若 A 按 (M, N) 是可约的, 则 A' 按 (M^0, N^0) 是可约的.

§ 46 基变换

设 V 是一个 n 维向量空间, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 与 $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ 是 V 中的两个基. 我们可以问下面的两个问题.

问题 I. 若 x 在 V 中, $x = \sum_i \xi_i x_i = \sum_i \eta_i y_i$, 则它对于基 X 的坐标 (ξ_1, \dots, ξ_n) 与它对于基 Y 的坐标 (η_1, \dots, η_n) 之间的关系是什么?

问题 II. 若 (ξ_1, \dots, ξ_n) 是 n 个纯量的有序集合, 则向量 $x = \sum_i \xi_i x_i$ 与 $y = \sum_i \xi_i y_i$ 之间的关系是什么?

§ 47 相似

问题Ⅲ. 若B是V上的线性变换, 则它在基X下的矩阵 (β_{ij}) 与它在基Y下的矩阵 (γ_{ij}) 之间的关系是什么?

问题Ⅳ. 若 (β_{ij}) 是一个矩阵, 则分别由 $Bx_j = \sum_i \beta_{ij} x_i$ 与 $Cy_j = \sum_i \beta_{ij} y_i$ 所定义的线性变换B与C之间的关系是什么?

§ 48 商变换

设A是向量空间V的线性变换, M是V的子空间, 并且在A之下不变, 用自然的方式定义空间V/M上的线性变换A/M:

$$(A/M)(x+M) = Ax + M.$$

§ 49 值域与零空间

定义. 设A是向量空间V上的一个线性变换, M是V的一个子空间, 则M在A下的象, 用记号AM表示, 是形如Ax的所有向量的集合, x在M中. A的值域 $R(A) = AV$; A的零空间是使 $Ax=0$ 的所有向量x的集合 $N(A)$.

定理. 若A是向量空间V的线性变换, 则

$$(1) \quad (R(A))^{\circ} = N(A'),$$

若V是有限维的, 则

$$(2) \quad (N(A))^{\circ} = R(A').$$

§ 50 秩与零度

定义. A是有限维向量空间的线性变换, A的秩 $\rho(A)$ 是 $R(A)$ 的维数, A的零度 $\nu(A)$ 是 $N(A)$ 的维数.

定理1. 若A是n维向量空间的线性变换, 则 $\rho(A) = \rho(A')$, $\nu(A) = n - \rho(A)$.

定理2. 若A是n维向量空间V的线性变换, K是V的h维子空间, 则AK的维数 $\geq h - \nu(A)$.

定理3. 若A与B是有限维向量空间的线性变换, 则

$$\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B),$$

$$\rho(AB) \leq \min \{ \rho(A), \rho(B) \},$$

$$\nu(AB) \leq \nu(A) + \nu(B).$$

若B是可逆的, 则

$$\rho(AB) = \rho(BA) = \rho(A).$$

§ 51 秩为1的线性变换

定理1. 若A是有限维向量空间V的线性变换, 并且 $\rho(A) \leq 1$ (即, $\rho(A) = 0$ 或 $\rho(A) = 1$), 则在每个坐标系下, A的矩阵 $[A] = (\alpha_{ij})$ 的元素有形式 $\alpha_{ij} =$

β_i, γ_j ; 反之, 若A的矩阵在某一坐标系下有这个形式, 则 $\rho(A) \leq 1$.

定理2. 若A是有限维向量空间V的秩为 ρ 的线性变换, 则A可以写为 ρ 个秩为1的线性变换的和.

定理3. 对应于有限维向量空间V的任意线性变换A, 有可逆线性变换P, 使PA是射影.

§ 52 线性变换的张量积

设U与V是有限维向量空间(在相同域上), A与B分别是U与V的线性变换. W是 $U \oplus V$ 上的所有双线型作成的空间, 我们用

$$(\overline{C}w)(x, y) = w(Ax, By)$$

定义W上的一个线性变换 \overline{C} . 线性变换A与B的张量积 $C = A \otimes B$ 是变换 \overline{C} 的对偶,

$$(Cz)(w) = z(\overline{C}w),$$

z 在 $U \otimes V$ 中, w 在W中.

$$(1) \quad Cz_0 = Ax_0 \otimes By_0,$$

$$(2) \quad A \otimes 0 = 0 \otimes A = 0,$$

$$(3) \quad 1 \otimes 1 = 1,$$

$$(4) \quad (A_1 + A_2) \otimes B = (A_1 \otimes B) + (A_2 \otimes B),$$

$$(5) \quad A \otimes (B_1 + B_2) = (A \otimes B_1) + (A \otimes B_2),$$

$$(6) \quad \alpha A \otimes \beta B = \alpha\beta(A \otimes B),$$

$$(7) \quad (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1},$$

$$(8) \quad (A_1 A_2) \otimes (B_1 B_2) = (A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2).$$

若A与B的矩阵分别是 $[A] = (\alpha_{ij})$, $[B] = (\beta_{ij})$, 则 $A \otimes B$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}[B] & \cdots & \alpha_{1n}[B] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1}[B] & \cdots & \alpha_{nn}[B] \end{pmatrix}.$$

§ 53 行列式

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

$$\det A = \det A'.$$

§ 54 特征值

纯量 λ 是线性变换A的特征值, 非零向量 x 是A的特征向量, 若 $Ax = \lambda x$.

§ 55 重数

设 A 是 n 维向量空间的线性变换, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ 是它的不同的特征值. 让我们用 m_j 记 λ_j 的代数重数, $j=1, \dots, p$, 则 $m_1 + \dots + m_p = n$.

§ 56 三角型

定理 1. 若 A 是 n 维向量空间 V 的线性变换, 则存在 $n+1$ 个子空间 $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n$, 具有下面的性质:

(1) 每个 M_j ($j=0, 1, \dots, n-1, n$) 在 A 之下是不变的,

(2) M_j 的维数是 j ,

(3) $(0=M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{n-1} \subset M_n (=V))$.

定理 2. 若 A 是 n 维向量空间 V 的线性变换, 则存在 V 的一个基 X , 使得 A 在 X 下的矩阵 $[A]$ 是三角型; 或者, 等价地, 若 $[A]$ 是任一矩阵, 则存在可逆 (非奇异) 矩阵 $[B]$, 使得 $[B]^{-1}[A][B]$ 是三角型.

§ 57 幂零性

线性变换 A 称为幂零的, 若存在严格正整数 q , 使得 $A^q = 0$; 这样的最小的整数 q 是幂零指数.

定理 1. 设 A 是有限维向量空间 V 上的指数是 q 的幂零线性变换, x_0 是使 $A^{q-1}x_0 \neq 0$ 的向量, 则向量 $x_0, Ax_0, \dots, A^{q-1}x_0$ 是线性无关的. 若 K 是这些向量生成的子空间, 则存在子空间 L , 使得 $V = K \oplus L$, 并且 A 按 (K, L) 是可约的.

定理 2. 若 A 是有限维向量空间 V 上的指数是 q 的幂零线性变换, 则存在正整数 r, q_1, \dots, q_r 与向量 x_1, \dots, x_r , 使得

(1) $q_1 \geq \dots \geq q_r$,

(2) 向量

$$x_1, Ax_1, \dots, A^{q_1-1}x_1,$$

$$x_2, Ax_2, \dots, A^{q_2-1}x_2,$$

.....

$$x_r, Ax_r, \dots, A^{q_r-1}x_r$$

形成 V 的一个基,

(3) $A^{q_1}x_1 = A^{q_2}x_2 = \dots = A^{q_r}x_r = 0$.

整数 r, q_1, \dots, q_r 形成 A 的同构不变的完全系. 换言之, 若 B 是有限维向量空间 W 上

的另一个幂零线性变换, 则存在 V 与 W 之间的同构 T , 使 $TAT^{-1}=B$ 的必要充分条件是, 整数 r, q_1, \dots, q_r 隶属于 B 与它们隶属于 A 是相同的.

§ 58 若当型

定理1. 有限维向量空间 V 的每个线性变换是一个幂零变换和一个可逆变换的直和

定理2. 若 A 是有限维向量空间 V 的线性变换, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ 是 A 的不同的特征值, 其代数重数分别是 m_1, \dots, m_p , 则 V 是 p 个子空间 M_1, \dots, M_p 的直和, 其维数分别是 m_1, \dots, m_p , 并且, 每个 M_j 在 A 之下是不变的, $A - \lambda_j$ 在 M_j 上是幂零的.

第 II 章 正交性

§ 59 内积

\mathbb{R}^2 中, $x=(\xi_1, \xi_2), y=(\eta_1, \eta_2), (x, y)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2$.

所考虑的向量对 x, y 的数值函数 (x, y) 的重要性质如下: 它对于 x 与 y 是对称的, 它线性地依赖于它的两个变量中的每一个, 除非 $x=0$, (x, x) 的值总是严格正的. (x, y) 称为 x 与 y 的内积或纯量积.

§ 60 复内积

\mathbb{C}^2 中, $x=(\xi_1, \xi_2), y=(\eta_1, \eta_2), (x, y)=\xi_1\bar{\eta}_1+\xi_2\bar{\eta}_2$.

§ 61 内积空间

定义. 向量空间 (实的或复的) 的一个内积是 (分别地, 实的或复的) 向量 x 与 y 的有序对的数函数值, 使得

- (1) $(x, y) = \overline{(y, x)},$
- (2) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y),$
- (3) $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0$ 当且仅当 $x=0$.

内积空间是带有内积的向量空间.

§ 62 正交性

向量 x 与 y 称为正交的, 若 $(x, y) = 0$.

若 ε 是内积空间 V 中向量的任意集合, 则我们用 ε^\perp 表示 V 中与 ε 中的每个向量都正交的所有向量集合. $\varepsilon^{\perp\perp} = (\varepsilon^\perp)^\perp$.

§ 63 完全性

定理1. 若 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 是内积空间中的任意有限正交组, x 是一个向量, $\alpha_i = (x, x_i)$, 则成立贝塞尔不等式

$$\sum_i |\alpha_i|^2 \leq |x|^2.$$

向量 $x' = x - \sum_i a_i x_i$ 与每个 x_j 正交, 因此, 与 X 所生成的子空间正交.

定理 2. 若 X 是内积空间 V 中的有限正交组, 则下面关于 X 的六个条件是相互等价的.

(1) 正交组 X 是完全的.

(2) 若 $(x, x_i) = 0, i = 1, \dots, n$, 则 $x = 0$.

(3) X 生成的子空间是整个空间 V .

(4) 若 x 在 V 中, 则 $x = \sum_i (x, x_i) x_i$.

(5) 若 x 与 y 在 V 中, 则 (Parseval 等式)

$$(x, y) = \sum_i (x, x_i)(x_i, y).$$

(6) 若 x 在 V 中, 则

$$|x|^2 = \sum_i |(x, x_i)|^2.$$

§ 64 施瓦兹不等式

定理. 若 x 与 y 是内积空间中的向量, 则

$$|(x, y)| \leq |x| |y|.$$

§ 65 完全正交组

定理. 若 V 是 n 维内积空间, 则 V 中存在完全正交组, V 中的每个完全正交组恰好包含 n 个元素. V 的正交维数与它的线性维数相同.

§ 66 射影定理

定理. 若 M 是有限维内积空间 V 的任意子空间, 则 V 是 M 与 M^\perp 的直和, 并且 $M^{\perp\perp} = M$.

§ 67 线性函数

定理. 对于有限维内积空间 V 的任意线性函数 y' , 都对应 V 中唯一的向量 y , 使得对于所有 $x, y'(x) = (x, y)$.

§ 68 圆括号对方括号

(x, y) 代替 $[x, y]$. V^* 代替 V' .

对应于 V 上的每个线性变换 A , 我们能由

$$(Ax, y) = (x, A^*y)$$

来定义线性变换 A^* . A^* 也是 V 上的线性变换.

$$(\alpha A)^* = \alpha A^*, \det A^* = \overline{\det A}.$$

§ 69 自然同构

设 y_0 是 V 中的任意元素, 有 V^* 中的线性函数 y_0^* 与它对应, 按 $y_0^*(x) = (x, y_0)$ 定义; 依次地, V^{**} 中的线性函数 y_0^{**} 与 y_0^* 对应, 按 $y_0^{**}(y^*) = (y^*, y_0^*)$ 定义.

设 y^* 是 V 上的任意线性函数 (即 V^* 的任意元素), 我们有

$$y_0^{**}(y^*) = (y^*, y_0^*) = (y_0, y) = y^*(y_0).$$

§ 70 自伴随变换

使得 $A = A^*$ 的线性变换称为自伴随的; 在实内积空间中的通常语言是对称的, 在复内积空间中是厄米特的.

定理 1. 若 A 与 B 是自伴随的, 则 AB (或 BA) 是自伴随的必要充分条件是 $AB = BA$ (即 A 与 B 可交换).

定理 2. 若 A 是自伴随的, 则对于所有的 B , B^*AB 是自伴随的. 若 B 是可逆的, B^*AB 是自伴随的, 则 A 是自伴随的.

$A^* = -A$ 时, A 称为斜对称的 (实空间中) 或斜厄米特的 (复空间中).

§ 71 配极变换

定理 1. 内积空间上的线性变换 A 是 0 的必要充分条件是, 对于所有的 x 与 y , $(Ax, y) = 0$.

定理 2. 内积空间上的线性变换 A 是 0 的必要充分条件是, 对于所有的 x , $(Ax, x) = 0$.

定理 3. 酉空间上的线性变换 A 是 0 的必要充分条件是, 对于所有的 x , $(Ax, x) = 0$.

定理 4. 酉空间上的线性变换 A 是厄米特的必要充分条件是, 对于所有的 x , (Ax, x) 是实的.

§ 72 正变换

定义. 内积空间上的线性变换 A 是正的, 用记号 $A \geq 0$, 若 A 是自伴随的, 并且, 对于所有的 x , $(Ax, x) \geq 0$. 正变换通常称为非负变换.

§ 73 等距

满足 $UU^* = U^*U = 1$ 的变换为正交的 (实空间) 或酉的 (酉空间).

定理. 关于内积空间上的线性变换 U , 下面三个条件相互等价.

(1) $U^*U = 1,$

(2) $(Ux, Uy) = (x, y),$ 对所有的 x 与 y ,

(3) $|Ux| = |x|,$ 对所有的 x .

§ 74 正交基的变换

定理 1. 若 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 是 n 维内积空间 V 的一正交基, U 在 V 上是酉的, 则 $UX = \{Ux_1, \dots, Ux_n\}$ 也是 V 的正交基. 反之, 若 U 是线性变换, X 是一正交基, UX 也是一正交基, 则 U 是酉的.

定理 2. 若 A 是复 n 维内积空间 V 的线性变换, 则在 V 中存在正交基 X , 使得 A 在 X 下的矩阵 A 是三角型, 或者, 等价地, 若 $[A]$ 是一个矩阵, 则存在一个等距的矩阵 $[U]$, 使得 $[U]^{-1}A[U]$ 是三角型.

§ 75 垂直射影

$V = M \oplus M^\perp$. 射影称为垂直射影.

定理 1. 线性变换是垂直射影当且仅当 $E = E^2 = E^*$. 垂直射影是正线性变换, 并且有性质 $|Ex| \leq |x|$, 对所有的 x .

定理 2. 若线性变换 E 满足 $E = E^2$, 并且 $|Ex| \leq |x|$, 对所有的 x , 则 $E = E^*$.

垂直射影 E 与 F 是正交的, 若 $EF = 0$.

定理 3. 两个垂直射影 $E = P_M$ 与 $F = P_N$ 是正交的当且仅当子空间 M 与 N (即, E 与 F 的象) 是正交的.

§ 76 垂直射影的组合

定理 1. 若 E_1, \dots, E_n 是垂直射影, 则 $E = E_1 + \dots + E_n$ 是垂直射影的必要充分条件是 $E_i E_j = 0$, $i \neq j$ (即, E_i 两两正交).

对于两个垂直射影 $E = P_M$ 与 $F = P_N$, 当 $M \subset N$ 时, 写 $E \leq F$.

定理 2. 对于垂直射影 $E = P_M$ 与 $F = P_N$, 下面的条件相互等价.

- (1) $E \leq F$.
- (2) $|Ex| \leq |Fx|$, 对所有的 x .
- (3) $M \subset N$.
- (4a) $FE = E$.
- (4b) $EF = E$.

§ 77 复化

设 V 是实向量空间, V^+ 是一切有序对 $\langle x, y \rangle$ 的集合, x 与 y 均在 V 中. 由

$$\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle$$

定义 V^+ 的两个元素的和. 由

$$(a + i\beta)\langle x, y \rangle = \langle ax - \beta y, \beta x + ay \rangle$$

定义 V^+ 的元素与复数 $a + i\beta$ (a 与 β 是实数, $i = \sqrt{-1}$) 的积. V^+ 对于这样定义的

线性运算作成复向量空间. V^+ 中 $y=0$ 的元素 $\langle x, y \rangle$ 的集合与空间 V 自然地一一对应, 称 V^+ 是 V 的复化.

写 $\langle x, y \rangle$ 为 $x+iy$.

存在一种自然的方式, 将 V 上的线性变换 A 扩充为 V^+ 上的线性变换 A^+ ,

$$A^+(x+iy) = Ax + iAy.$$

若 A 是 V 上的线性变换, A^+ 有特征向量 $x+iy$, 属于特征值 $\alpha+i\beta$ (其中 x 与 y 在 V 中, 而 α 与 β 是实数), 则

$$Ax = \alpha x - \beta y,$$

$$Ay = \beta x + \alpha y,$$

x 与 y 生成的 V 的子空间在 A 之下是不变的.

§ 78 谱的特征

定理 1. 若 A 是内积空间的自伴随变换, 则 A 的每个特征值是实的; 若 A 是正的或严格正的, 则 A 的每个特征值分别是正的或严格正的.

定理 2. 有限维内积空间的自伴随变换的特征方程的每个根是实的.

定理 3. 酉变换的每个特征值的绝对值是 1.

定理 4. 若 A 是自伴随的或酉的, 则 A 的属于不同特征值的特征向量是正交的.

定理 5. 若 U 是有限维内积空间的酉变换, 子空间 M 在 U 之下是不变的, 则 M^\perp 也是.

定理 6. 若 A 是有限维内积空间上的自伴随变换, 则 A 的每个特征值 λ 的代数重数等于它的几何重数 (即 $Ax = \lambda x$ 的所有解作成的子空间的维数).

定理 7. 若 U 是有限维酉空间的酉变换, 则 U 的每个特征值的代数重数等于它的几何重数.

§ 79 谱定理

定理 1. 对于有限维内积空间上的每个自伴随线性变换, 都对应地存在实数 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与垂直射影 E_1, \dots, E_r (其中 r 是严格正的整数, 且不大于空间的维数) 并且

(1) α_j 两两不同,

(2) E_j 两两正交且异于 0,

(3) $\sum_j E_j = 1$,

(4) $\sum_j \alpha_j E_j = A$.

表达式 $A = \sum_j \alpha_j E_j$ (其中 α 与 E 满足定理 1 的条件(1)–(3)) 称为 A 的谱形式.

定理 2. 若 $\sum_{j=1}^r \alpha_j E_j$ 是有限维内积空间上的自伴随变换 A 的谱形式, 则 α_j 是 A

的所有不同的特征值. 若 $1 \leq k \leq r$, 则存在实系数多项式 p_k , 使得 $j \neq k$ 时, $p_k(\alpha_j) = 0$, $p_k(\alpha_k) = 1$, 对于每个这样的多项式, $p_k(A) = E_k$.

定理 3. 若 $\sum_{j=1}^r \alpha_j E_j$ 是有限维内积空间上的自伴随变换 A 的谱形式, 则线性变换

B 与 A 可交换的必要充分条件是 B 与每个 E_j 可交换.

§ 80 正规变换

我们将称线性变换 A 是正规的, 若它与它的伴随变换 A^* 可交换, $AA^* = A^*A$.

定理 1. 若 A 是正规的, 则 x 是 A 的特征向量的必要充分条件是 x 是 A^* 的特征向量; 若 $Ax = \lambda x$, 则 $A^*x = \bar{\lambda}x$.

定理 2. 若 A 是正规的, 则 A 的属于不同特征值的特征向量是正交的.

定理 3. 若 A 是正规的, λ 是 A 的特征值, M 是 $Ax = \lambda x$ 的所有解的集合, 则 M 与 M^\perp 同时在 A 之下不变.

定理 4. 有限维酉空间上的正规变换是 (1) 厄米特的, (2) 正的, (3) 严格正的, (4) 酉的, (5) 可逆的, (6) 幂等的当且仅当它的所有特征值是 (1) 实的, (2) 正的, (3) 严格正的, (4) 绝对值为 1 的, (5) 异于零的 (6) 等于 0 或 1 的.

§ 81 正交变换

设 U 是有限维实内积空间 V 上的正交变换, 则 U 在一个基下的矩阵是: 主对角线上先有一串 $+1$, 再有一串 -1 , 再有一串 2×2 的块 $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

§ 82 变换的函数

设 A 是酉空间的正规变换, $\sum_j \alpha_j E_j$ 是 A 的谱形式, f 是任一个复值函数, 至少在点 α_j 处被定义, 则我们按

$$f(A) = \sum_j f(\alpha_j) E_j$$

定义一个线性变换 $f(A)$.

§ 83 极分解

定理1. 若A是有限维内积空间上的任意线性变换, 则存在唯一确定的正变换P, 存在酉变换U, 使得 $A=UP$. 若A是可逆的, 则U也是由A唯一确定的.

U是等距的, P是正的, 表达式 $A=UP$ 称为A的极分解.

定理2. 若 $A=UP$ 是线性变换A的极分解, 则A是正规的必要充分条件是 $UP=PU$.

§ 84 交换性

定理1. 有限维内积空间上的两个自伴随变换A与B可交换当且仅当存在自伴随变换C, 存在两个实变量的实值函数f与g, 使得 $A=f(C)$, $B=g(C)$. 若这样的C存在, 我们可以选择C具有形式 $C=h(A, B)$, 其中h是一个适当的两个实变量的实值函数.

定理2. 若A是有限维酉空间上的正规变换, B是与A可交换的任意变换, 则B与 A^* 可交换.

§ 85 秩为1的自伴随变换

定理1. 若A的秩为1, 并且是自伴随的(或正的), 则在任意正交坐标系下A的矩阵 (α_{ij}) 由 $\alpha_{ij}=\kappa\beta_i\bar{\beta}_j$ (或 $\alpha_{ij}=\gamma_i\bar{\gamma}_j$)给出, κ 为实数. 反之, 若 $[A]$ 在某一正交坐标系下有这种形式, 则A的秩为1, 并且是自伴随的(或正的).

定理2. 若A与B是正线性变换, 某个正交坐标系下的矩阵分别是 (α_{ij}) 与 (β_{ij}) , 线性变换C在相同坐标系下的矩阵是 (γ_{ij}) , $\gamma_{ij}=\alpha_{ij}\beta_{ij}$, 对于一切i与j, 则C也是正的.

第IV章 分析

§ 86 向量的收敛

V中的向量序列 (x_n) 收敛于V中的向量x.

(1) $|x_n - x| \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$;

(2) $(x_n - x, y) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 对于V中每个固定的y.

若(1)正确, 对于每个y, 我们有

$$|(x_n - x, y)| \leq |x_n - x| |y| \rightarrow 0,$$

从而(2)正确, $(1) \Rightarrow (2)$. 在有限维空间中, 也有 $(2) \Rightarrow (1)$.

§ 87 范数

定义. 内积空间V上的线性变换A是有界的, 若存在常数 κ , 使得对于V中的任意的x, $|Ax| \leq \kappa |x|$. 具有这种性质的所有常数 κ 的最下界称为A的范数(或界), 记作 $\|A\|$.

$$\|A\| = \inf \{ \kappa \mid |Ax| \leq \kappa |x|, \text{ 对所有 } x \}.$$

定理. 有限维内积空间上的每个线性变换是有界的.

§ 88 关于范数的式子

$$p = \sup \{ \|Ax\| / \|x\| \mid x \neq 0 \},$$

$$q = \sup \{ \|Ax\| \mid \|x\| = 1 \},$$

$$r = \sup \{ |(Ax, y)| / \|x\| \|y\| \mid x \neq 0, y \neq 0 \},$$

$$s = \sup \{ |(Ax, y)| \mid \|x\| = \|y\| = 1 \}.$$

$$\|A\| = p = q = r = s.$$

$$(1) \quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

$$(2) \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

$$(3) \quad \|aA\| \leq |a| \|A\|,$$

$$(4) \quad \|A^*\| = \|A\|.$$

§ 89 自伴随变换的界

A是自伴随变换.

$$\Phi = \{ (Ax, x) / \|x\|^2 \mid x \neq 0 \},$$

$$\Psi = \{ (Ax, x) \mid \|x\| = 1 \},$$

$$\alpha = \inf \Phi = \inf \Psi,$$

$$\beta = \sup \Phi = \sup \Psi,$$

$$\gamma = \max \{ |\alpha|, |\beta| \} = \|A\|.$$

§ 90 极大原则

定理. 设A是有限维内积空间V上的一个伴随变换, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (不必是不相同的) 是A的特征值, 且选择 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ 的情况. 若对于V的每个子空间M,

$$\mu(M) = \sup \{ (Ax, x) \mid x \text{ 在 } M \text{ 中}, \|x\| = 1 \}$$

并且, 对于 $k=1, \dots, n$,

$$\mu_k = \inf \{ \mu(M) \mid \dim M = n - k + 1 \},$$

则对于 $k=1, \dots, n$, $\mu_k = \lambda_k$.

§ 91 线性变换的收敛

线性变换的序列 (A_n) 收敛于固定的线性变换A.

以下三个条件相互等价;

$$(1) \quad \|A_n - A\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

$$(2) \quad \|A_n x - Ax\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \text{ 对每个固定的 } x;$$

(3) $|(A_n x, y) - (Ax, y)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 对于每对固定的 x 与 y .

具有下列性质:

(1) 若 $A_n \rightarrow A$ 则 $\|A_n\| \rightarrow \|A\|$;

(2) 若 $A_n \rightarrow A$, 且 $x_n \rightarrow x$, 则 $A_n x_n \rightarrow Ax$;

(3) 若 $A_n \rightarrow A$, 则 $A_n^* \rightarrow A^*$.

§ 92 遍历定理

定理. 若 U 是有限维内积空间上的一个等距线性变换, M 是 $Ux = x$ 的所有解作成的子空间, 则由

$$V_n = \frac{1}{n} (1 + U + \cdots + U^{n-1})$$

定义的序列当 $n \rightarrow \infty$ 时收敛于垂直射影 $E = P_M$.

§ 93 幂级数

A 是有限维向量空间上的线性变换, A 的范数 < 1 .

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n, \quad S_p = \sum_{n=0}^p A^n.$$

(1) $(1-A)S_p = S_p - AS_p = 1 - A^{p+1}$.

(2) $S_p = (1-A)^{-1}(1-A^{p+1}) = (1-A^{p+1})(1-A)^{-1}$.

当 $p \rightarrow \infty$ 时, $A^{p+1} \rightarrow 0$, 从而 S_p 收敛, 有极限 $S = (1-A)^{-1}$.

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} A^i = (1-A)^{-1}.$$

(摘译自: Paul R. Halmos, Finite-Dimensional Vector Spaces, Springer-Verlag New York, 1974)

(孙宗明)

附录五 数学证明方法

本文简单地叙述数学证明方法。

一 数学证明方法的分类

将数学证明方法分为一般的、较一般的、特殊的三个部分。

人类的认识运动，有由特殊到一般的过程，又有由一般到特殊的过程，在形式逻辑中，前者称为归纳，后者称为演绎。相应地，在数学证明中，就有演绎法和归纳法。归纳法作为数学证明方法，是指的完全归纳法。

要证明一个数学命题，可以对数学命题本身采取两种做法：一种是直接证明命题自身的正确性，另一种是通过证明与要证明的命题等效的其它命题来证明命题自身。相应于前者的数学证明方法称为直接证法，相应于后者的数学证明方法称为间接证法。反证法、同一法、半反证法是几种不同的间接证法。

要证明一个数学命题，都有一个如何思索以求得证明的问题，都有一个从何着手的问题。按照思路的“顺”和“逆”，可分为两种：一种是由命题的条件入手，一步一步地推到结论；一种是由命题的结论入手，一步一步地靠近条件，最后找到结论与条件之间的必然联系。相应的数学证明方法，前者称为综合法，后者称为分析法。

于是，演绎法是相对于归纳法而言的，直接证法是相对于间接证法而言的，综合法是相对于分析法而言的，这三对六种证明方法，是一般的、应用广泛的证明方法，归入一般的证明方法这一类中。

数学归纳法是一种变态的演绎法，对于证明与自然数有关的数学命题而言，它是基本的、有力的方法。这种证明方法，就整个证明过程而言，它是归纳的，所以有归纳法的名字，但它又不同于完全归纳法，因此称之为数学归纳法。数学归纳法主要是第一数学归纳法、第二数学归纳法，其次是反向归纳法、多重归纳法，无穷递降法等。

轮换证法是与分断式命题相联系的一种证明方法，而分断式命题是一类十分重要的命题，它全面地反映了所研究的对象的性质。

数学归纳法，轮换证法归入较一般的证明方法这一类中。

其余的证明方法都归入特殊的证明方法这一类中。它们或是上述一般的或较一般的证明方法的推论，或是某一种证明的技巧。就它们的使用范围来说，或是属于一个小范围的证明方法，或是为了证明某个问题而创造的证明方法。

二 一般的数学证明方法

要证明数学命题 $A \Rightarrow B$ ，演绎法的方法是：选择论据 $A_1 \Rightarrow B_1$ 作为推理的前提，而且有 $A \Rightarrow A_1$ ，根据演绎推理三段论，得出 $A \Rightarrow B_1$ ；再选择论据 $A_2 \Rightarrow B_2$ 为

推理前提，而且有 $B_1 \Rightarrow A_2$ ，根据演绎推理三段论，得出 $B_1 \Rightarrow B_2$ ；如此下去，得出 $B_{n-1} \Rightarrow B_n$ ， $B_n \Rightarrow B$ 。从而，有一系列： $A \Rightarrow B_1$ ， $B_1 \Rightarrow B_2$ ， \dots ， $B_{n-1} \Rightarrow B_n$ ， $B_n \Rightarrow B$ ，根据推理的传递性，得出 $A \Rightarrow B$ 。不难看出，大部分已经做过的数学证明，都是这样进行的。

数学证明中的归纳法，就是完全归纳法。不完全归纳法不能作为数学证明方法，而只能作为一个发现新问题的推理方法。要证明数学命题 $A \Rightarrow B$ ，完全归纳的方法是：将总体区分为若干种情况 A_1 ， A_2 ， \dots ， A_n ，这些情况合起来就构成了 A 的全部，称为 A 的一个分划，记为 $A \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ 。对每种情况证明命题成立，即 $A_1 \Rightarrow B$ ， $A_2 \Rightarrow B$ ， \dots ， $A_n \Rightarrow B$ ，根据完全归纳法原理，得出 $A \Rightarrow B$ 。顺便指出，完全归纳法有助于培养缜密的思考方法，十分重要。

要证明数学命题 $A \Rightarrow B$ ，直接由 $A \Rightarrow B$ 入手进行证明，就是说，取公理、已有的定义和定理作论据，由条件 A 出发进行逻辑推理，一直到结论 B ，从而达到证明的目的。这样的证明方法称为直接证法。在数学证明中，尤其是初等数学的证明中，直接证法占的比重较大。

要证明数学命题 $A \Rightarrow B$ ，采用直接证法来证较为困难或暂时不可能，则改而证明与 $A \Rightarrow B$ 等效的其它命题，从而得以证明 $A \Rightarrow B$ ，间接地达到证明的目的。这样的证明方法称为间接证法。间接证法有反证法、半反证法和同一法等。

应用反证法来证明数学命题 $A \Rightarrow B$ ，是通过证明与其等效的命题 $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ 来达到证明目的的。由于从结论 B 的反面 \bar{B} 出发，所以称为反证法。应用反证法证明问题，大体可分为四步：1) 分析要证明的命题，明确其条件和结论，把命题明确地写为 $A \Rightarrow B$ 的形式， A 为条件， B 为结论；2) 确定 \bar{B} ，亦即假定结论 B 不成立；3) 由 \bar{B} 出发，根据公理、已有的定义与定理，并使用命题的条件 A ，应用正确的推理方法，一直到得出矛盾的结果，所谓矛盾的结果是指：与已知条件 A 相矛盾，与已知的定义、公理、定理相矛盾，得出两个矛盾的结果，得出自相矛盾的结果等；4) 在确认所作逻辑推理无误的情况下，指出所做的假设 \bar{B} 不成立，从而，根据形成逻辑的排中律，确立 B 成立。

对于满足“同一原理”的命题，可以用“同一法”证明。所谓“同一原理”是指：如果一个命题的条件和结论都唯一存在，它们所指的概念是同一概念，那么这个命题和它的逆命题等效。对于满足“同一原理”的命题，通过证明逆命题来证明命题自身，称为“同一法”。初等几何中，常常用“同一法”来证明“某图形具有某种性质”这类命题，命题中的“某种性质”是“唯一存在的”。

所谓综合法，是从命题的条件出发，经过一步一步的逻辑推理，最后达到要证的

结论. 用综合法证明命题“若 A 则 B ”的理路是: $A \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow \dots \Rightarrow B$, 即“由因求果”. 用综合法证明, 每一步推理都是寻找必要条件, 最后达到要证的结论.

所谓分析法, 是从命题的结论出发, 一步一步地探索结论得以成立的条件, 最后达到命题的已知条件. 用分析法证明命题“若 A 则 B ”的理路是: $B \Leftarrow C \Leftarrow \dots \Leftarrow A$, 即“执果索因”. 用分析法进行证明, 每一步推理都是寻找充分条件, 最后找到要证命题的已知条件.

于是, 综合法顺, 而分析法逆; 综合法宜于表述, 而分析法利于思考; 综合给人以条理清晰的知识, 而分析法使人知道证明是如何得出的; 综合法便于书面阐述, 而分析法便于口头阐述. 两者各有利弊, 经常在证明时合并使用, 互相补充. 一般说来, 对于一个要证明的数学命题, 大多是用分析法求得解决的办法, 而后用综合法条理地表达出来.

三 较一般的数学证明方法

数学归纳法是一种较一般的证明方法. 根据最小数原理, 利用反证法, 可以证明下面的两个定理.

第一数学归纳法原理. 要证明与自然数有关的命题 $N(n)$ 对一切自然数 n 成立, 只要证明: 1) $N(1)$ 成立; 2) 在 $N(k)$ ($k \geq 1$)成立的假定下, 证明 $N(k+1)$ 成立.

第二数学归纳法原理. 要证明与自然数有关的命题 $N(n)$ 对一切自然数 n 成立, 只要证明: 1) $N(1)$ 成立; 2) 在 $N(x)$ ($1 \leq x \leq k$)成立的假定下, 证明 $N(k+1)$ 成立.

轮换证法是用来证明分断式命题可逆性时用的一种证明方法.

假如 n 个命题的条件和结论所论及的事项都面面俱到而且互不相容, 把这 n 个命题合起来组成一个命题 N , 则 N 称为分断式命题. N 的逆命题 N' 也组成一个分断式命题. 图示为

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \Rightarrow B_1 \\ A_2 \Rightarrow B_2 \\ \dots\dots\dots \\ A_n \Rightarrow B_n \end{array} \right\} \text{组成 } N, \quad \left. \begin{array}{l} B_1 \Rightarrow A_1 \\ B_2 \Rightarrow A_2 \\ \dots\dots\dots \\ B_n \Rightarrow A_n \end{array} \right\} \text{组成 } N'.$$

轮换证法从形式上看就是反证法, 从略. 用轮换证法可以证明 $N \Leftrightarrow N'$, 从略. 因此, 若命题是由分断式命题组成的必要充分条件时, 则只须证明一方即可. 这是一个基本的知识.

四 特殊的数学证明方法

特殊的证明方法很多, 这里仅介绍常用的两种: 循环证法, 抽屉证法.

如果要证明若干个数学命题相互等价, 可以将这些命题排成一个顺序: A_1

A_2, \dots, A_n . 从 A_1 开始, 以 A_1 为条件证 A_2 , 以 A_2 为条件证 A_3, \dots , 以 A_{n-1} 为条件证 A_n , 以 A_n 为条件证 A_1 , 回到 A_1 终止. 若将 A_1, A_2, \dots, A_n 依次放于一个圆周上, 则上述过程正是: 由 A_1 出发沿一个方向绕圆一周又回到 A_1 , 所以, 称为循环证法, 或称为转圈证法.

对于 A_1, A_2, \dots, A_n 实行了循环证法之后, 其中的任两个就相互等价了. 例如, A_i 与 A_j 两个命题, $1 \leq i < j \leq n$. 实际上有: 1) $A_j \Rightarrow A_i$, 这是由于 $A_j \rightarrow A_{j+1} \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_{i-1} \rightarrow A_i$, 根据传递性, 得到 $A_j \Rightarrow A_i$; 2) $A_i \Rightarrow A_j$, 这是由于 $A_i \rightarrow A_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow A_j$, 根据传递性, 得到 $A_i \Rightarrow A_j$. 从而就有 $A_i \Leftrightarrow A_j$.

抽屉证法是由抽屉原则给出的一种证明方法.

抽屉原则. 若 n 个抽屉中放入 $n+1$ 件或多于 $n+1$ 件东西, 则, 至少有一个抽屉里放两件东西.

抽屉证法是证明一类特殊的数学命题的有效方法. 这类数学命题的一个共同特点是: 结论形式有“至少有两个..., 使它们的...”. 其一般步骤是: 第一步, 依对象的一种性质, 设计 n 个抽屉; 第二步, 确定对象的数目多于 n 个; 第三步, 由抽屉原则得出结论.

参 考 文 献

- [1] 孙宗明, 数学归纳法原理的直接证法及其相互等价性, 山东师大学报(自然科学版), 1981年第2期.
- [2] 孙宗明, 略谈数学的创造性学习方法, 泰安师专学报(自然科学版), 1985年.
- [3] 孙宗明, 略谈数学命题的获得过程, 吉安师专学报(自然科学版), 1986年第1期.
- [4] 廖祖纬、张锦文, 逻辑代数, 科学出版社, 1984.

(孙宗明)

[General Information]

□□ = □□□□□□□□□□

□□ = □□□□□□□□□□□□□□□□

□□ = 4 6 4

SS□ = 1 1 7 6 1 0 6 4

□□□□ = 1 9 9 0 □ 0 9 □ □ 1 □

□ □
 □ □
 □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □